توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

جبر و آنالیز

سال چهارم

آموزش متوسطهٔ عمومی

ریاضی و فیزیک

۲۹۵

توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

جبر و آنالیز

سال چهارم

آموزش متوسطه عمومی

ریاضی و فیزیک

۲۵۳۷ شاهنشاهی

پدیدآورندگان

مؤلفان ● غلامرضا عسجدی ● جلیل‌الله قراگزلو ● هدایت‌الله موسوی

این کتاب در سال ۲۵۳۷ شاهنشاهی بوسیله وزارت
آموزش و پرورش مورد تجدید نظر قرار گرفته است.

صفحه پرداز فاطمه سقانژاد تهرانی
چاپ از چاپخانه پیروز

به‌نام خدا

فهرست

مقدمه

اگر به پیشرفت انسان در زمینه‌های علوم وفنون توجه شود ملاحظه خواهد شد که از اواخر قرن‌هفدهم میلادی به‌اینطرف این پیشرفت چشمگیر وانقلابی بوده است. درحال حاضر نیز گسترش تکنیك وصنعت ، شگفت‌انگیز و حتی رعب آسا می‌باشد. دست اندازی انسان به کرات آسمانی نشانهٔ گسترش همه جانبهٔ صنعت است .

عامل اساسی و ریشهٔ باطنی این پیشرفت تحول در ریاضیات وکاربرد آن‌ها در اکثر علوم وفنون از جمله فیزیك ، نجوم ، مهندسی ، شیمی ، اقتصاد ، زمین شناسی، زیست‌شناسی وحتی این اواخر برخی از شاخه‌های علوم اجتماعی بوده است. این تحول باپیدایش مفاهیم مشتق وانتگرال دراواخرقرن هفدهم میلادی آغازشد وافتخارپیدایش آن رابایدازآن اسحق‌نیوتن و گا تفرید لاینیز دانست. این مفاهیم‌را کدنماندند ومرتب درحال توسعه وتعمیم بودند. درقرن نوزدهم دوتن‌ازریاضی‌دانان بزرگ به‌نامهای آگوستین کشی وبرناردریمان مفهوم‌انتگرال را به طوردقیق درقالب ریاضیات بیان‌کردند واین مفهوم بعدآدراوائل قرن‌بیستم توسطریاضی دان نامی هنری‌لبگ توسعه یافت.

درکتاب حساب وجبر سال سوم با مفاهیم حد وپیوستگی ومشتق‌آشنا شده‌اید در این‌کتاب ابتدا این‌مطالب را بررسی کرده و درجهت تکمیل آن مطالبی اضافه می‌کنیم ، سپس به بررسی تغییرات ورسم نمودار برخی‌از توابع ومسائل وابسته به‌آنها خواهیم پرداخت. سرانجام بامطالعهٔ مختصری در مورد دیفرانسیل ، تابع اولیه ، و مفهوم ابتدائی انتگرال وکاربرد آنها کتاب را به‌پایان می‌رسانیم .

فصل ۱

یادآوری و تکمیل

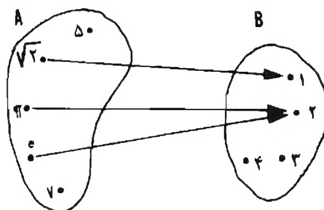
بیشتر مطالب این فصل همان مطالبی است که درکتاب حساب وجبر سال سوم با آنها آشنا شده‌اید. چون این مطالب اهمیت زیادی دارند آنها را یادآوری نموده و در جهت تکمیل آنها مطالبی اضافه می‌نمائیم.

۱-۱- تعریف تابع— فرض‌کنید A و B دومجموعه باشند. f زیر مجموعهٔ از حاصلضرب دکارتی $A\times B$ (یعنی یك رابطه از A به B)را یك تابع از A به B گویندهرگاه $(a,b)\in f$ و $(a,b')\in f$، آنگاه $b=b'$. به عبارت دیگر f مجموعه ایست ازجفت‌های مرتب در$A\times B$ به قسمی‌که هیچ دو عضو متفاوت f دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشند. مجموعهٔ مؤلفه‌های اول اعضای تابع f را دامنهٔ (دامنهٔ تعریف) f ومجموعهٔ مؤلفه‌های دوم اعضای f را بردf می‌خوانند وآنها را به ترتیب با D_f و R_f نشان می‌دهند. وقتی (x,y) عضو دلخواهی از f باشد y را مقدار تابع f در x می‌خوانند و معمولاآن را به‌صورت$y=f(x)$ می‌نویسند. دراین مقام‌مؤلفهٔ اول، یعنی x، را متغیر مستقل و مؤلفهٔ دوم، یعنی y، را متغیر تابع می‌خوانند، توجه کنیدکه تابع f،که مجموعه‌ای از زوجهای مرتب است، بامقدار آن در x، یعنی $f(x)$، فرق دارد.

هرگاه f تابعی از A به B باشد، مؤلفهٔ دوم هرزوج مرتب در f بطور یگانه‌ای از روی مؤلفهٔ اول آن زوج مرتب مشخص می‌شود و بدین ترتیب از روی f قانون یادستوری بدست می‌آید که به‌کمك آن می‌توان به هرعضو x از D_f یك وتنها یك عضو yمتعلق به R_f متناظر ساخت به‌قسمی‌که $(x,y)\in f$. به عکس هرگاه دستور یاقانونی داشته باشیم که به هرعضو x از یك زیر مجموعهٔ A یك وتنها یك عضو$y\in B$را نسبت دهد، مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب (x,y) که به این ترتیب حاصل می‌شود تابعی از AبهB خواهد بود. ازاین روی معمولا برای‌مشخص کردن تابع دامنهٔ آن وقانون یادستور را می‌دهند، واگر دامنه داده نشود باید آن را بزرگترین زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ جهانی (مورد بحث) اختیار کرد که آن قانون برای‌آن زیر مجموعه بامعنی است. وقتی f تابعی است از A به B معمولا می‌نویسند $f:A\to B$ ودرصورتیکه A وB وقانون تابع مشخص باشند به‌نوشتن $f: x\to f(x)$ یا $y=f(x)$ اکتفا می‌کنند.

هرگاه دامنه وبرد تابعی زیر مجموعه‌هائی ازR، یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، آنگاه آن تابع‌را یك تابع عددی یاحقیقی می‌نامند. در این‌کتاب اغلب سروکارمان باتوابع حقیقی است.

مثـال ۱ — فرض کنید $A=\{۵, \sqrt{۲}, \pi, e, ۷\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴\}$. شکل زیر تابع f از A به B را مشخص می‌کند.



دامنه و برد f ودستور $y=f(x)$ را مشخص کنید، مجموعهٔ f را بنویسید.

حل ــ باملاحظهٔ شکل معلوم می‌شود که دامنه و برد f چنین است.

$$D_f = \{\sqrt{۲}, \pi, e\}$$

$$R_f = \{۱, ۲\}$$

دستور $y=f(x)$ آنرا مشخص کنید

x	۵	$\sqrt{۲}$	π	e	۷
$f(x)=y$		۱	۲	۲	

مجموعهٔ f چنین است:

$$f=\{(\sqrt{۲}, ۱) \text{ و } (\pi, ۲) \text{ و } (e, ۲)\}$$

مثال۲ـ معین کنید رابطهٔ زیر تابع است یا خیر:

$$E=\{(x,y) \mid x^۲+y^۲-۱=۰\}$$

جواب ــ بدیهی است که این رابطه تابع نیست زیرا مثلا به ازای $x=۰$ دو مقدار ۱ و ۱ — برای y بدست می‌آید.

مثال۳ـ دامنهٔ تعریف تابع زیر را مشخص کنید:

$$F=\{(x,y) \mid y=\sqrt{x-۱}\}$$

جواب ــ دامنهٔ تعریف آن چنین است:

$$D_f=\{x \mid x> ۱\}$$

مثال۴ـ دامنهٔ تعریف تابع f را که به وسیلهٔ $x \longmapsto \frac{x}{x-۲}$ مشخص شده است تعیین کنید.

جواب‌ـ دامنه تعریف‌تابع چنین است $D_f = R - \{۲\}$

در این کتاب معمولا " بجای " تابع f با ضابطهٔ $y = f(x)$ " عبارت "تابع $y = f(x)$ " بکار رفته است .

تمرین:

۱ ـ آیا مجموعهٔ زیر تابعی را نمایش می‌دهد یا خیر:

$f = \{(۱,۲)$ و $(۳,۵)$ و $(۴,۲)$ و $(۱,۵)\}$

۲ ـ در رابطهٔ زیر اصلاحی بکنید تا تابعی را نمایش بدهد

$f : x \longmapsto y = \pm \sqrt{x}$

۳ ـ نمودار تابع زیر را رسم‌کنید

$f : x \longmapsto \frac{x}{|x|}$

۴ ـ نمودار تابع زیر را رسم‌کنید

$f : x \longmapsto |x^۲ - ۲x + ۲|$

۵ـ نمودار تابع زیر را رسم‌کنید

$f : x \longmapsto \frac{x-۱}{x+۱}$

۶ـ کدام یك از دستورهای زیر یك تابع را مشخص می‌کنند.

$y = \sin x$ ، $y = \operatorname{arctg} x$ $\quad (x^۲ - y^۲)$

۷ـ مجموعهٔ زیر داده شده است با تغییر یك عدد آنرا تابع‌کنید

$\{(۱,۲)$ و $(۲,۳)$ و $(۳,۴)$ و $(۲,۴)\}$

۸ـ تابع f به شکل‌زیر داده شده است

$f = \{(x,y) | x \in N$ و $x < ۶$ و $y = x^۲\}$

N مجموعهٔ اعداد طبیعی‌است. تابع f را به شکل زوجهای‌مرتب‌بنویسید (نمایش‌تفصیلی)

۹ـ دامنهٔ تعریف تابـــع $x \longmapsto \frac{۱}{x^۲ - ۱}$ رابنویسید

۱۰ـ دامنهٔ تعریف تابع $x \longmapsto \frac{x}{x} + ۱$ را بنویسید

۱۱ـ دامنهٔ تعریف تابع $f = \{(a,۱)$ و $(b,۲)$ و $(c,۳)\}$ را بنویسید

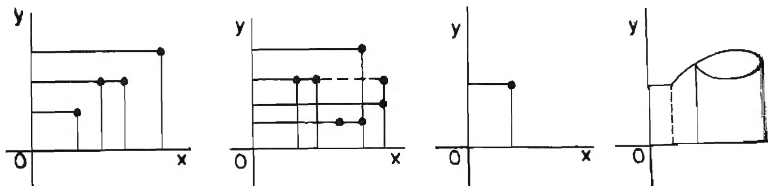
۱۲ـ رابطهٔ $\frac{x^۲}{۱۶} + \frac{y^۲}{۹} = ۱$ دستورهائی برای دو تابع بدست می‌دهد ، آنهارا ازهم جدا کنید و دامنهٔ تعریف هریك را بنویسید.

۱۳ـ تابعی بنویسیدکه شامل یك یا دو یا سه زوج مرتب باشد

۱۴- تابعی به شکل {(۴,۵) و (۳,۴) و (۲,۳) و (۱,۲)}=f داده شده‌است، ضابطهٔ $y=f(x)$ آنرا مشخص کنید

۱۵- تابعی به شکل {(۴,۱) و (۳,۴) و (۲,۳) و (۱,۲)}=f داده شده است، قانون $y=f(x)$ آنرا معلوم کنید

۱۶- اشکال زیر نمودار روابطی هستند. مشخص کنید کدامیك از آنها تابع است و کدامیك تابع نیست.



۱۷- هرخط موازی با محور Oy نمودار يك تابع را حد اکثر درچند نقطه قطع می‌کند؟ (x متغیر مستقل است)

۱۸- هرخط موازی بامحور Ox نمودار يك تابع را حداکثر در چند نقطه قطع می‌کند؟ (y متغیرمستقل است)

۱۹- هرخط موازی بامحور Oy نمودار يك تابع را درچند نقطه قطع می‌کند؟ (y متغیر مستقل است)

۲۰- هرخط موازی بامحور Ox نمودار يك تابع را درچند نقطه قطع می‌کند؟ (x متغیر مستقل است)

دامنهٔ تعریف هریك از توابع زیر را مشخص کنید:

۲۱- $f: x \longmapsto x^{2}+5x+1$

۲۲- $f: x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ بحث

۲۳- $f: x \longmapsto \dfrac{x^{2}+1}{x^{2}-2}$

۲۴- $f: x \longmapsto \sqrt{x^{2}-1}$

۲۵- $f: x \longmapsto \sqrt{ax^{2}+bx+c}$ بحث

۲۶- $f: x \longmapsto \dfrac{ax^{2}+bx+c}{a'x^{2}+b'x+c'}$ بحث

$$f:x\longmapsto \frac{x}{x-1}+\sqrt{x^2-16}$$ -۲۷

آیا معادلات دو متغیرهٔ زیر که در آنها x متغیر مستقل است تابعی تعریف می‌کنند یا خیر:

-۲۸ $xy+8=0$

-۲۹ $x^2+y^2-1=0$

-۳۰ $x^3y+x^2y-2y+3x=0$

-۳۱ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0$

-۳۲ $y^2-3x=0$

-۳۳ $x^2+3y=0$

-۳۴ $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$

حد

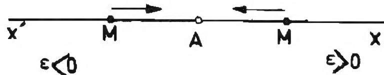
۱-۲-مقدمه— برای تعریف حد تابع درحالت کلی به سه تعریف زیر نیاز داریم :

الف ـ می‌گوئیم متغیر x به سمت x_0 میل می‌کند و می نویسیم $x\to x_0$ ، درصورتیکه فاصلهٔ نقطهٔ x تانقطهٔ x_0 یعنی $|x-x_0|$ مثبت بوده وازهرعدد مثبت کوچك α(هراندازه کوچك که بخواهیم) کوچکترشود .

اگر تفاضل $x-x_0$ را که می‌تواند مثبت یامنفی باشد ε بنامیم خواهیم داشت :

$$x-x_0=\varepsilon \Longrightarrow x=x_0+\varepsilon$$

روی محور $x'x$ نقطهٔ A را به طول ثابت x_0 و نقطهٔ M را به طول متغیر x انتخاب می‌کنیم. اگر $\varepsilon>0$ باشد $x>x_0$ و نقطهٔ M ازسمت راست به‌نقطهٔ A میل می‌کند واگر $\varepsilon<0$ باشد نقطهٔ M ازطرف چپ به نقطهٔ A میل می‌کند . حالت $\varepsilon=0$ پیش نخواهد آمد ، زیرا که $x-x_0$ مخالف صفر فرض شده است. توجه داریم که نقطهٔ M نمی تواند به‌نقطهٔ A برسدبلکه هراندازه که بخواهیم می‌توا ند به‌آن نزدیك بشود. این مطلب را درشکل زیر نشان داده‌ایم .



ب ـ اگر مقادیر متغیر x از هرعدد مثبت بزرگی‌بزرگتر شود ، می‌گوئیم x به سمت باضافه بینهایت میل می‌کند واین مطلب را به اختصار چنین نشان می‌دهیم $x\to+\infty$.

توجه‌کنید که $+\infty$ یك عدد نیست و $x\to+\infty$ فقط یك نماد بـرای نشان دادن مفهوم فوق است .

ج- اگر مقادیرمتغیر x از هرعدد منفی کوچکی کوچکتر شود، می گوئیم x به سمت منهای بینهایت میل می کند ومی نویسیم $x \to -\infty$.

توجه کنیدکه روی محور اعداد حقیقی جائی بنام $-\infty$ نداریم و $x \to -\infty$ فقط نمادی برای نشان دادن مفهوم بالا است .

۱-۳- حد تابع - اکنون تابع f وفاصلهٔ باز I ونقطهٔ x_0 ازاین فاصله رادرنظرمی گیریم وفرض می کنیم که f در I (مگر محتملا در x_0) تعریف شده است. می گوئیم: حدتابع f وقتی که x به سمت x_0 میل کند عدد (حقیقی) L است ومی نویسیم:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

هرگاه به‌ازای هر عدد مثبت β عدد مثبتی مانند α (معمولا به β بستگی دارد) وجودداشته باشد به‌قسمی که داشته باشیم :

$$\text{(I)} \quad 0 < |x - x_0| < \alpha \text{ و } x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L| < \beta$$

در تعریف فوق β و α دو عدد مثبت‌اند که هراندازه بخواهیم می‌توانیم آنها را کوچك اختیار کنیم . ابتدا باید β را اختیارکنیم وسپس ثابت‌کنیم که لااقل یك α که معمولا به β بستگی دارد پیدا می‌شودکه استلزام بالا صحیح باشد.

D_f دامنهٔ تعریف تابع‌است وبدیهی است‌که x باید متعلق به دامنه باشد تا f(x) تعریف شده باشد . ازاین روی گاهی اوقات در استلزام فوق از نوشتن شرط $x \in D_f$ خودداری‌می‌کنیم ولی استنباط چنین‌خواهد بودکه همواره x به D_f متعلق است. علاوه براین‌همانطورکه درتعریف $x \to x_0$ دیدیم x نباید برابر x_0 اختیار شود.

معمولا برای مختصر وساده نویسی، تعریف $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ را به‌صورت نمادی زیر می‌نویسند . (نماد «$\ni$» خوانده می‌شود : به قسمی که یا به طوریکه) .

$$\forall \beta > 0 \quad \exists \alpha > 0 \ni \quad 0 < |x - x_0| < \alpha \text{ و } x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L| < \beta$$

۱-۴- نکات قابل توجه درحد - اگر تابع f وقتی x به سمت x_0 میل کند حد داشته باشد ، نکات زیر را باید درنظر داشت :

الف - اگر L حد f باشد ، L عددی است حقیقی و یگانه (یگانگی‌آن را در اینجا ثابت نمی کنیم .)

ب- گفتن اینکه f(x) به سمت L میل می‌کند به تنهائی هیچ معنی ندارد، مگر اینکه بگوئیم f (x) به سمت L میل می‌کند وقتی‌که x به سمت مثلا x_0 میل کند.

پ ـ تعریف $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ حد هم‌ارز است بااینکه بگوئیم به ازای هر $\beta > 0$ یك $\alpha > 0$ وجود دارد بطوریکه اگر $x \neq x_0$ متعلق به فاصلهٔ باز $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ و دامنهٔ تعریف f باشد، آنوقت مقدار f دراین x به فاصلهٔ باز $]L-\beta$ و $L+\beta[$ متعلق باشد. توجه کنید که حد f به مقادیر نزدیك به x_0 بستگی دارد نه به خود x_0. ممکن است $f(x_0)$ اصلا تعریف نشده باشد و یا درصورت تعریف شدن با L مساوی نباشد. مثلا حد تابع $f(x) = \frac{x^2}{x}$ وقتی $x \to 0$ مساوی باصفر است درصورتیکه $f(0)$ معنی ندارد.

ت ـ برای آنکه نشان دهیم $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ حد باید $\beta > 0$ را به دلخواه انتخاب کنیم و یك $\alpha > 0$ به دست آوریم که در تعریف حد صدق کند. α معمولا منحصر به فردنیست و اگر α_0 درتعریف صادق باشد هرعدد α، $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$ نیز در تعریف صدق خواهد کرد.

مثال ۱ ـ می‌خواهیم با استفاده ازتعریف حد ثابت کنیم حد تابع

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{اگر } x \neq -1 \\ 2 & \text{اگر } x = -1 \end{cases}$$

وقتی x به سمت ۱ ـ میل کندبرابر ۵ ـ است.

حل ـ باید ثابت کنیم که به ازای هر $\beta > 0$ یك $\alpha > 0$ وجود دارد به قسمی که:

$$0 < |x-(-1)| < \alpha \Rightarrow |f(x)-(-5)| < \beta$$

چون $|x+1| = |x-(-1)| > 0$ بدین معنی‌است که $x \neq -1$ پس $f(x) = 2x-3$ واستلزام فوق به‌صورت زیر در می‌آید

$$0 < |x+1| < \alpha \Rightarrow |(2x-3)-(-5)| < \beta$$

ویا

$$0 < |x+1| < \alpha \quad \Rightarrow \quad 2|x+1| < \beta$$

ویا

$$0 < |x+1| < \alpha \Rightarrow |x+1| < \frac{\beta}{2}$$

بنابر این کافیست که $\alpha > 0$ را کوچکتراز $\frac{\beta}{2}$ یا مساوی آن اختیار کنیم. در حقیقت

اگر $0 < |x+1| < \frac{\beta}{2}$ آنوقت $2|x+1| < \beta$ و یا

$|2x+2| < \beta$ ویا $|(2x-3)-(-5)| < \beta$ که همان چیزی است که

می خواستیم ثابت کنیم .

توجه کنید که در این مثال $f(-۱)=۲$ در حالیکه $\text{حد}_{x\to -۱} f(x) = -۵$ پس بطور کلی لازم نیست که حد تابع در یك نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه باشد.

مثال ۲ - تابع $f(x)=ax+b$ را که در آن a و b دو عدد حقیقی و ثابت هستند در نظر می‌گیریم . با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که حد f وقتی که $x \to x_0$ برابر $f(x_0)=ax_0+b$ می باشد . یعنی :

$$\text{حد}_{x\to x_0} (ax+b)=ax_0+b$$

حل ـ حالت اول $a=0$. باید ثابت کنیم :

$$\text{حد}_{x\to x_0} (b)=b$$

بنا به تعریف باید نشان دهیم :

$$\forall\beta>0 \quad \exists\alpha>0 \quad \ni 0<|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-b|<\beta$$

یا

$$\forall\beta>0 \quad \exists\alpha>0 \ni 0<|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |b-b|<\beta$$

اما $|b-b|=0$ و از هر $\beta>0$ کوچکتر است پس هر $\alpha>0$ درتعریف صدق می‌کند.

حالت دوم $a\neq 0$. بنا به تعریف باید نشان دهیم :

$$\forall\beta>0 \quad \exists\alpha>0 \quad \ni \quad 0<|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |(ax+b)-(ax_0+b)|<\beta$$

یا

$$\forall\beta>0 \quad \exists\alpha>0 \quad \ni 0<|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |a(x-x_0)|<\beta$$

یا

$$\forall\beta>0 \quad \exists\alpha>0 \quad \ni \quad 0<|x-x_0|<\alpha \quad \Rightarrow \quad |x-x_0|<\frac{\beta}{|a|}$$

بنابراین‌کافیست α رامثبت وکوچکتراز $\frac{\beta}{|a|}$ یا مساوی آن اختیار کنیم تا تعریف بر قرار شود ، در حقیقت اگر $0<|x-x_0|<\frac{\beta}{|a|}$ آنوقت $|a||x-x_0|<\beta$ ویا $|a(x-x_0)|<\beta$ ویا $|(ax-b)-(ax_0-b)|<\beta$ که حکم مورد نظر است .

۱-۵- حد در بینهایت و حدهای بینهایت — تا کنون در مورد $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ حد که در آن نه x_0 ونه L بینهایت بودند بحث کرده‌ایم . ولی حالتهائی وجود دارد که در آنها x_0 یا L یاهردومتفقاً $+\infty$ یا $-\infty$ ویا ∞ هستند. اگر تمام حالتهای ممکن را درنظر بگیریم مجموعاً شانزده حالت می‌شود که یکی‌ازآنها همان حالتی است‌که هم x_0 وهم L اعداد حقیقی هستند و قبلا تعریف آن را دیده‌اید . اکنون یکی از پانزده حالت باقیمانده را طرح و برای آن مثالی می‌زنیم ، سپس همهٔ شانزده حالت را در جدولی خلاصه می‌کنیم تا مراجعه به آن آسان باشد.

تعریف — فرض‌کنیدکه تابع f برای هر $x>a$ تعریف شده باشد،که درآن a عددی است حقیقی. گوئیم وقتی x به سمت $+\infty$ میل‌کند حد f عدد حقیقی L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

هرگاه به ازای هر $\beta>0$ یك $M>0$ وجود داشته باشد به قسمی که :

$$x\in D_f \text{ و } x>M \Rightarrow |f(x)-L|<\beta$$

یا بطور نمادی

$$\forall\beta>0 \quad \exists M>0 \ni x>M \text{ و } x\in D_f \Rightarrow \quad |f(x)-L|<\beta$$

مثال — ثابت کنید که :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{2x+4}=\frac{3}{2}$$

حل — باید نشان دهیم که :

$$\forall\beta>0 \quad \exists M>0 \ni x>M \Rightarrow \left|\frac{3x+1}{2x+4}-\frac{3}{2}\right|<\beta$$

فرض می‌کنیم M با این خاصیت موجود باشد پس نامساوی طرف دوم استلزام فوق برقرار است . اکنون سعی می‌کنیم به کمك‌آن M را حدس بزنیم وسپس‌حدس خودرا امتحان خواهیم کرد . اما نامساوی طرف دوم استلزام فوق را می‌توان چنین نوشت:

$$\left|\frac{3x+1}{2x+4}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{-10}{2(2x+4)}\right|=\frac{5}{|2x+4|}<\beta$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$|2x+4|>\frac{5}{\beta}$$

برای x در فاصلهٔ]$+\infty$ و ۰] قدر مطلق ۲x+۴ برابر خود ۲x+۴ بوده وداریم :

$$|2x+4|>\frac{5}{\beta} \Rightarrow 2x+4>\frac{5}{\beta} \Rightarrow x>\frac{5-4\beta}{2\beta}$$

پس اگر $\frac{5-4\beta}{2\beta}$ مثبت باشد هرعدد بزرگتر یا مساوی $\frac{5-4\beta}{2\beta}$ را می‌توان بـه عنوان M اختیار کرد و اگر $\frac{5-4\beta}{2\beta} \leqslant 0$ هرعدد مثبت را می‌توان به عنوان M انتخاب کرد. مثلافرض کنید کـه $\frac{5-4\beta}{2\beta}>0$ و $M=\frac{5-4\beta}{2\beta}$. حال صحت استلزام فوق را در این حـالت بررسی می‌کنیم:

$$x>\frac{5-4\beta}{2\beta}=M \Rightarrow 2x>\frac{5}{\beta}-4\Rightarrow 2x+4>\frac{5}{\beta}\Rightarrow|2x+4|>\frac{5}{\beta}$$

$$\Rightarrow\frac{5}{|2x+4|}<\beta \Rightarrow \left|\frac{-10}{2(2x+4)}\right|<\beta\Rightarrow\left|\frac{3x+1}{2x+4}-\frac{3}{2}\right|<\beta$$

بررسی صحت استلزام را در حالتی‌که $\frac{5-4\beta}{2\beta}\leqslant 0$ به عهدهٔ خواننده واگذارمی‌کنیم .

۱-۶- جدول حددرحالتهای مختلف— گفتیم اگر تمام حالتهای ممکن حد تابع را در نظر بگیریم شانزده حالت می‌شود ومی‌توانیم بقیهٔ این شانزده حالت را مانند حالتهای بررسی‌شده بحث کنیم ومثال بزنیم. لیکن بهتر است‌آنها را درجدولی خلاصه‌کنیم تامراجعه به‌آن آسان باشد. جدول صفحه‌بعد برای این منظور تهیه شده است .

خواندن جدول ودرك مقصود آن آسان است . برای خواندن هرسطر نمادهای آن سطر را به ترتیب به‌جای سه‌نقطه‌های ابتدای جدول (ازبالا) قرارداده وعبارت حاصل را ازچپ بدراست میخوانیم . مثلا سطر هفتم را چنین می‌خوانیم :

وقتی x به سمت $+\infty$ میل‌کند f(x) به سمت $-\infty$ میل خواهدکرد هرگاه برای هر $N>0$ یك $M>0$ وجود داشته باشد به قسمی‌که از نامساوی $x>M$ نامساوی $f(x)<-N$ نتیجه شود .

جدول تعریف حد تابع $f:x \longrightarrow f(x)$

وقتی x به‌سمت ... میل کند	f(x) به‌سمت ... میل خواهد کرد	هرگاه برای هر	یك...وجود داشته باشد	به‌قسمی که از نامساوی ...	نامساوی ...نتیجه‌شود
x_0	L	$\beta>0$	$\alpha>0$	$0<\|x-x_0\|<\alpha$	$\|f(x)-L\|<\beta$
x_0	$+\infty$	$N>0$	$\alpha>0$	$0<\|x-0\|<\alpha$	$f(x)>N$
x_0	$-\infty$	$N>0$	$\alpha>0$	$0<\|x-x_0\|<\alpha$	$f(x)<-N$
x_0	∞	$N>0$	$\alpha>0$	$0<\|x-x_0\|<\alpha$	$\|f(x)\|>N$
$+\infty$	L	$\beta>0$	$M>0$	$x>M$	$\|f(x)-L\|<\beta$
$+\infty$	$+\infty$	$N>0$	$M>0$	$x>M$	$f(x)>N$
$+\infty$	$-\infty$	$N>0$	$M>0$	$x>M$	$f(x)<-N$
$+\infty$	∞	$N>0$	$M>0$	$x>M$	$\|f(x)\|>N$
$-\infty$	L	$\beta>0$	$M>0$	$x<-M$	$\|f(x)-L\|<\beta$
$-\infty$	$+\infty$	$N>0$	$M>0$	$x<-M$	$f(x)>N$
$-\infty$	$-\infty$	$N>0$	$M>0$	$x<-M$	$f(x)<-N$
$-\infty$	∞	$N>0$	$M>0$	$x<-M$	$\|f(x)\|>N$
∞	L	$\beta>0$	$M>0$	$\|x\|>M$	$\|f(x)-L\|<\beta$
∞	$+\infty$	$N>0$	$M>0$	$\|x\|>M$	$f(x)>M$
∞	$-\infty$	$N>0$	$M>0$	$\|x\|>M$	$f(x)<-M$
∞	∞	$N>0$	$M>0$	$\|x\|>M$	$\|f(x)\|>M$

مثال— تابع f بوسیله دستور $f(x)=\frac{-1}{(x-3)^2}$ داده شده است. ثابت کنید که اگر x به سمت ۳ میل کند $f(x)$ به‌سمت $-\infty$ میل خواهد کرد.

حل ـ بنا به سطرسوم جدول باید برای هر $N>0$ یك $\alpha>0$ بیابیم به قسمی که :

$$0<|x-3|<\alpha \Rightarrow \frac{-1}{(x-3)^2}<-N$$

فرض می‌کنیم که α با این خاصیت موجود باشد . پس نامساوی طرف دوم استلزام فوق برقرار است . حال سعی می‌کنیم به‌کمك آن α را حدس بزنیم وسپس حدس خود را امتحان خواهیم کرد. اما :

$$\frac{-1}{(x-3)^2}<-N \Rightarrow \frac{1}{(x-3)^2}>N \Rightarrow (x-3)^2<\frac{1}{N} \Rightarrow |x-3|<\frac{1}{\sqrt{N}}$$

بنابراین دیده میشود که هر عدد مثبت کوچکتر یامساوی $\frac{1}{\sqrt{N}}$ را می‌توان به عنوان α اختیار کرد . حال فرض کنید داشته باشیم $0<\alpha\leqslant\frac{1}{\sqrt{N}}$ ، درنتیجه :

$$0<|x-3|<\frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow 0<(x-3)^2<\frac{1}{N} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{(x-3)^2}>N \Rightarrow \frac{-1}{(x-3)^2}<-N$$

یعنی جوابی که برای α حدس زده بودیم در استلزام فوق صدق می‌کند و اثبات کامل است.

توجه ـ همانطور که مشاهده کرده‌اید سعی شده است که مثالهای ساده‌ای درمورد تعیین حد توابع با استفاده از تعریف داده شود و این بدان سبب بوده است که بیشتر بامفهوم حد آشنا شوید . اصولا محاسبهٔ حد بااستفاده از تعریف کار ساده‌ای نیست و معمولا برای این محاسبات از قضایای حد که بعداً درمورد آنها صحبت خواهیم کرد استفاده می‌شود بهمین سبب درزیرسعی شده است که تمرینهای ساده‌ای گنجانده شود.

تمرین :

تساویهای زیر را با استفاده از تعریف حد ثابت‌کنید.

1ـ $\underset{x\to 1}{\text{حد}}(-3x-1)=-4$

2ـ $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$

3ـ $\underset{x\to -5}{\text{حد}}|x-3|=8$

۴ـ $\underset{x \to 1}{\text{حد}} \frac{(x-1)^2}{x-1} = 0$

۵ـ $\underset{x \to 0}{\text{حد}} \frac{1}{x} = \infty$

۶ـ $\underset{x \to +\infty}{\text{حد}} \frac{1}{x} = 0$

۷ـ $\underset{x \to -\infty}{\text{حد}} \frac{1}{x} = 0$

۸ـ $\underset{x \to \infty}{\text{حد}} \frac{1}{x} = 0$

۹ـ $\underset{x \to +\infty}{\text{حد}} \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2}$

۱۰ـ $\underset{x \to -\infty}{\text{حد}} \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2}$

۱۱ـ $\underset{x \to +\infty}{\text{حد}} x^2 = +\infty$

۱۲ـ $\underset{x \to -\infty}{\text{حد}} x^2 = +\infty$

۱۳ـ $\underset{x \to -\infty}{\text{حد}} x^3 = -\infty$

۱۴ـ $\underset{x \to \infty}{\text{حد}} x^3 = \infty$

۱ـ۷ـ حد چپ وحد راست یك تابع ـ فرض کنید کـه تابع f درنقطهٔ x_0 دارای حدی برابر عدد L باشد. در نتیجه به ازای هر $\beta > 0$ یك $\alpha > 0$ موجود است بهقسمی که :

$$0 < |x - x_0| < \alpha \text{ و } x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L| < \beta$$

ازاین تعریف چنین برمی‌آید که وقتی x به‌سمت x_0 میل کند، خواه از آن بزرگتر باشد خواه از آن کوچکتر ، $f(x)$ درهر دوحالت به‌سمت L میل خواهدکرد پس‌داریم :

$$(1) \quad x_0 < x < x_0 + \alpha \text{ و } x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L| < \beta$$
و
$$(2) \quad x_0 - \alpha < x < x_0 \text{ و } x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L| < \beta$$

مطالب فوق ما را به تعریف زیر هدایت می کند.

تعریف — تابع f ونقطهٔ x_0 مفروضند .

الف — فرض کنیدکه $a > x_0$ و f درفاصلهٔ باز $]x_0 a[$ تعریف شده باشد. گوئیم تابع f در نقطهٔ x_0 دارای حد راست L است و می‌نویسیم $\underset{x \to x_0^+}{\text{حد}} f(x) = L$ ، هرگاه به‌ازای هر $\beta > 0$ یك $\alpha > 0$ موجود باشد به قسمی که :

$$x_0 < x < x_0 + \alpha \text{ و } x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L| < \beta$$

ب — فرض کنید که $a < x_0$ و f درفاصلهٔ باز $]a x_0[$ تعریف شده باشد ، گوئیم تابع f درنقطهٔ x_0 دارای حد چپ L' است ومی‌نویسیم $\underset{x \to x_0^-}{\text{حد}} f(x) = L'$ ، هرگاه به‌ازای هر $\beta > 0$ یك $\alpha > 0$ موجود باشد به قسمی که :

$$x_0 - \alpha < x < x_0 \text{ و } x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L'| < \beta \, .$$

اگر تابع f درنقطهٔ x_0 دارای‌حد L باشدآنوقت استلزامهای (۱) و (۲) بالانشان‌می‌دهند که f در x_0 دارای حد راست وچپ بوده واین دوحد باهم مساوی و مساوی همان L می‌باشند. به عکس می‌توان دید(که ما دراینجا ازاثبات آن‌خودداری می کنیم) که اگر تابع f در x_0 دارای حد راست وحد چپ بوده واین دو حد بایکدیگر مساوی وبرابر L باشندآنوقت f در x_0 دارای حد L است. پس می‌توان گفت :

قضیه ـ تابع f در x_0 دارای‌حد L است اگر و تنها اگر، f در x_0 دارای حد چپ‌وراست مساوی L باشد .

اکنون مثالهائی درمورد حدچپ وحدراست می‌آوریم .

مثال ۱ ـ حدچپ و حدراست تابع $f(x) = 7x + 3$ را وقتی x بـه سمت ۱ میل کنـد تعیین کنید .

حل ـ درمثال ۲ بخش ۱ـ۴ دیدیم که $\underset{x \to x_0}{\text{حد}} (ax + b) = ax_0 + b$ پس :

$$\underset{x \to 1}{\text{حد}} (7x + 3) = 7 \times 1 + 3 = 10$$

در نتیجه بنا به قضیه فوق داریم :

$$\lim_{x\to 1^-}(7x+3)=10 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1^+}(7x+3)=10$$

مثال ۲ - حدهای چپ وراست تابع $y=\sqrt{x-2}$ را وقتی که x به سمت ۲ میل کند (درصورت وجود)تعیین کنید.

حل - برای اینکه y معنی داشته باشد باید $x\geqslant 2$. پس دامنهٔ تعریف تابع چنین است $D=\{x\,|\,x\geqslant 2\}$. چون تابع در سمت چپ ۲ تعریف نشده است پس حد چپ معنی ندارد .

حال ادعا می‌کنیم که $\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$. برای اثبات این ادعا باید نشان دهیم که:

$$\forall\beta>0\quad \exists\alpha>0 \ni 2<x<2+\alpha \Rightarrow |\sqrt{x-2}-0|<\beta$$

و یا

$$\forall\beta>0\quad \exists\alpha>0 \ni 2<x<2+\alpha \Rightarrow \sqrt{x-2}<\beta$$

و یا بامجذور کردن سمت راست استلزام اخیر

$$\forall\beta>0\quad \exists\alpha>0 \ni 2<x<2+\alpha \Rightarrow 0\leqslant x-2<\beta^2$$

و یا

$$\forall\beta>0\quad \exists\alpha>0 \ni 2<x<2+\alpha \Rightarrow 2\leqslant x<2+\beta^2$$

بنابراین دیده می‌شود که اگر $0<\alpha\leqslant\beta^2$ اختیار شود استلزام فوق برقرار است . این تابع بطور کلی حد ندارد زیرا حد چپ ندارد.

قبل از پرداختن به مثال ۳ توجه شمارا به این نکته جلب می‌کنیم که می‌توان تعاریفی شبیه به آنچه که درمورد حدچپ وراست در x_0 بیان کردیم درموردحالت‌های ∞ و $-\infty$ و $L=+\infty$ نیز بیان کرد. مثلا تعریف $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$ بطور نمادی چنین است :

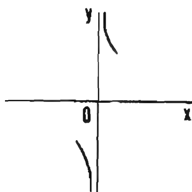
$$\forall N>0\quad \exists\alpha>0 \ni x_0-\alpha<x<x_0 \Rightarrow f(x)>N$$

مثال ۳ - حد چپ وراست تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را وقتیکه x به‌سمت صفر میل کند تعیین کنید.

حل- می‌بینیم که مقدار $f(0)$ بی‌معنی است و دامنهٔ تعریف تابع $R-\{0\}$ می‌باشد. اگر x منفی باشد و به‌سمت صفر میل کند حد تابع $-\infty$ است و اگر x مثبت باشد و به سمت صفر میل کند حد تابع $+\infty$ است پس:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

درستی این تساویها را می‌توان به‌کمك تعریف تحقیق نمود، که ما ازوارد شدن در این بحث خودداری می‌کنیم. توجه‌کنید که $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$ حد و در واقع این بدان معنی است که وقتی x به سمت صفر میل می‌کند $|f(x)|$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند. منحنی نمایش این تابع در نزدیکی نقطهٔ صفر در زیر رسم شده است.



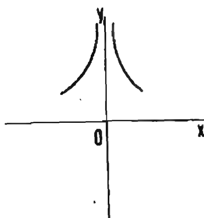
مثال۴- حدتابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ را وقتی‌که x به سمت صفر میل می‌کند تعیین کنید.

حل ــ در اینجا نیز f در صفر تعریف نشده است ودامنهٔ تعریف تابع مجموعهٔ $R-\{0\}$ می‌باشد. خواه x مثبت باشد وخواه منفی و به‌سمت صفر میل‌کند، $f(x)$ به‌سمت $+\infty$ میل خواهدکرد یعنی:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$$

چون حد سمت چپ و حدسمت‌راست تابع‌مساوی‌هستند پس‌تابع $\frac{1}{x^2}$ حد دارد ولی این‌حد باپایان نیست. به‌این سبب گاهی گفته می‌شود تابع حد ندارد یعنی حد باپایانی مانند L را ندارد در شکل مقابل نمودار تابع در نزدیکی نقطهٔ صفررسم شده است.



مثال۵- حدتابع $f:x \to \frac{|x|}{x}$ را وقتیکه x به‌سمت صفر میل‌کند تعیین‌کنید.

حل ــ بازدراینجا مقدار $f(0)$ معنی ندارد، دامنهٔ تعریف‌تابع $D_f=R-\{0\}$ می‌باشد.

این تابع رامی‌توان چنین نوشت :

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{اگر } x>0 \\ -1 & \text{اگر } x<0 \end{cases}$$

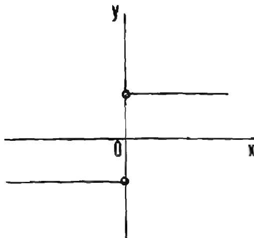
باتوجه به این داریم :

$$\underset{x\to 0^+}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\ 1 = \underset{x\to 0}{\text{حد}}\ 1 = 1$$

و

$$\underset{x\to 0^-}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to 0^-}{\text{حد}} (-1) = \underset{x\to 0}{\text{حد}} (-1) = -1$$

پس تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد ندارد نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است:



مثال ۶ - تابع f به صورت زیر داده شده است :

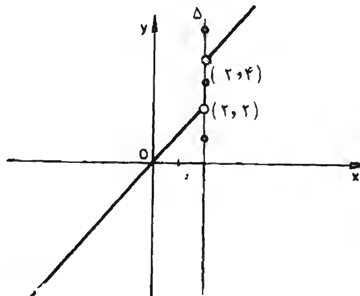
$$f(x)=\begin{cases} x & \text{اگر } x<2 \\ 5 & \text{اگر } x=2 \\ x+2 & \text{اگر } x>2 \end{cases}$$

حد راست و حد چپ این تابع را وقتی که x به سمت ۲ میل کند پیدا کنید .

حل ـ دامنهٔ تعریف این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی است یعنی $D_f = R$. داریم :

$$\underset{x\to 2^-}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to 2^-}{\text{حد}}\ x = \underset{x\to 2}{\text{حد}}\ x = 2 \quad \text{و}$$

$$\underset{x\to 2^+}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to 2^+}{\text{حد}} (x+2) = \underset{x\to 2}{\text{حد}} (x+2) = 2+2 = 4$$



ملاحظه می‌شود که $f(2)$ نه باحد چپ برابر است ونه با حد راست. نمودار این تابع در شکل بالا رسم شده است.

۱-۸ - حد چپ وحد راست در تابع قدر مطلق درجه اول- تابع

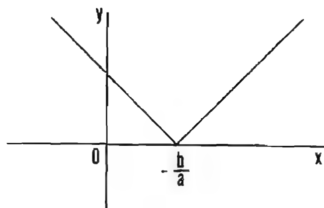
$f:\ x \longrightarrow y=|ax+b|$ راکه در آن $a\neq ۰$ درنظرمی گیریم . می‌توان فرض کرد که ضریب x یعنی a مثبت‌است زیرا درغیراینصورت تابع f را به‌صورت $f(x)=|-ax-b|$ می‌نویسیم که دردستور اخیر ضریب x یعنی $-a$ مثبت است . دامنهٔ تعریف f مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرمنفی می‌باشد.

مقداردوجمله‌ای $ax+b$ به‌ازای $x=-\frac{b}{a}$ صفر ودراین نقطه تغییر علامت می‌دهد. پس تعریف تابع چنین می‌شود .

$$f(x)=\begin{cases} -ax-b & x<-\frac{b}{a} \text{ اگر} \\ ۰ & x=-\frac{b}{a} \text{ اگر} \\ ax+b & x>-\frac{b}{a} \text{ اگر} \end{cases}$$

به طوری‌که ملاحظه می‌شود اگر x به سمت $-\frac{b}{a}$ میل کند حد چپ و حد راست و مقدار تابع هر سه باهم مساویند .

$$\underset{x\to -\frac{b}{a}^-}{\text{حد}}(ax+b)=\underset{x\to -\frac{b}{a}^+}{\text{حد}}(ax+b)=\underset{x\to -\frac{b}{a}}{\text{حد}}(ax+b)=f(\frac{-b}{a})=۰$$



نمودار تابع درنقطهٔ $(\frac{-b}{a}$ و ۰$)$ شکسته می‌شود و مطابق شکل مقابل است.

مثال- تابع

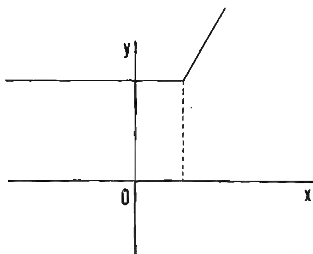
$$f:x \longrightarrow x+۱+|x-۱|$$

مفروض است اگر x به سمت ۱ میل کند حد تابع را معلوم و نمودار آنرا رسم کنید.

حل – این تابع را می‌توان به‌صورت زیرنوشت :

$$f(x)=\begin{cases} f(x)=۲ & : x<۱ \text{ اگر} \\ f(x)=۲ & : x=۱ \text{ اگر} \\ f(x)=۲x & : x>۱ \text{ اگر} \end{cases}$$

۵



ملاحظه می‌شود که حدهای چپ و راست و مقدار تابع درنقطه ۱ باهم برابرند ومساوی ۲ می‌باشند یعنی:

$$\underset{x \to ۱^-}{\text{حد}} [x+۱+|x-۱|] = \underset{x \to ۱^+}{\text{حد}} [x+۱+|x-۱|] = f(۱) = ۲$$

نمودار تابع در شکل بالا رسم شده است.

۱ - ۹ - حدچپ وحد راست در تابع پله‌ای [x] — همانطور که در کتاب حساب و جبر سال سوم دیده‌اید، [x] مساوی بزرگترین عدد درست کوچکتر یامساوی **x** است.

مثلا اگر $p \leqslant x < p+۱$ و p عددی درست باشد داریم $[x]=p$.

به این ترتیب :

برای $-۲ \leqslant x < -۱$ مقدار تابع مساوی است با ۲ −

برای $-۱ \leqslant x < ۰$ مقدار تابع مساوی است با ۱ −

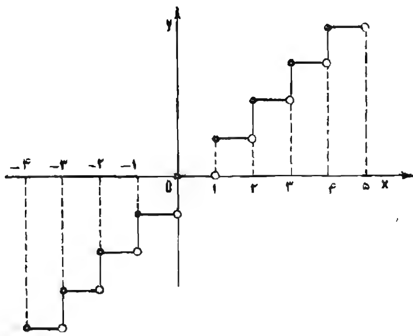
برای $۰ \leqslant x < ۱$ مقدار تابع مساوی است با ۰

برای $۱ \leqslant x < ۲$ مقدار تابع مساوی است با ۱

. . . .

. . . .

قسمتی از نمودار تابع را در شکل زیر رسم کرده‌ایم.



اکنون ملاحظه می‌کنیم که این تابع درهر نقطه که طولش عددی درست باشد حد ندارد. مثلا نقطهٔ به طول ۳ را درنظر می‌گیریم خواهیم داشت:

حد چپ: $\lim_{x\to ۳^-}[x] = \lim_{x\to ۳^-} ۲ = \lim_{x\to ۳} ۲ = ۲$

حد راست: $\lim_{x\to ۳^+}[x] = \lim_{x\to ۳^+} ۳ = \lim_{x\to ۳} ۳ = ۳$

مقدار تابع: $f(۳) = [۳] = ۳$

به همین ترتیب در نقطهٔ به طول عدد درست P خواهیم داشت:

حد چپ: $\lim_{x\to p^-}[x] = p - ۱$

حد راست: $\lim_{x\to p^+}[x] = p$

مقدار تابع: $f(p) = p$

چون در نقاط به طول عدد درست، حد چپ و حد راست تابع با یکدیگر مساوی نیستند پس این تابع در آن نقاط حد ندارد. در نقاطی‌که طولشان عددی درست نیست این تابع حد دارد زیرا در نزدیکی و دوطرف چنین نقاطی تابع مقداری ثابت است.

۱ - ۱۰- حدچپ وحد راست‌در تابع هموگرافیك - تابع $f:x \to \frac{ax+d}{cx+d}$ که در آن $c \neq ۰$ به تابع هموگرافیك موسوم است. بررسی‌این تابع ونمودار آن در سال سوم گفته شده است. این تابع در تمام‌مجموعهٔ اعداد حقیقی جز نقطهٔ به طول $-\frac{d}{c}$، که به ازای آن مخرج کسر $\frac{ax+b}{cx+d}$ صفر می‌شود، تعریف شده است. پس دامنهٔ تعریف‌آن مجموعهٔ $D_f = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ می‌باشد.

حد چپ و حد راست تابع در موقعی که x به سمت $-\frac{d}{c}$ میل‌کند با یکدیگر مساوی نیستند. اگر تابع صعودی باشد حد چپ $+\infty$ وحد راست $-\infty$ است و اگر تابع نزولی باشد حد چپ $-\infty$ و حد راست $+\infty$ خواهد بود.

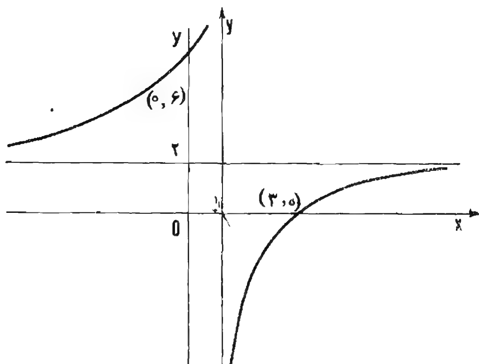
مثال- نمودار تابع $f:x \to \frac{۲x-۶}{x-۱}$ را رسم کنید.

حل - مشتق این تابع به‌صورت $f'(x) = \frac{۴}{(x-۱)^۲}$ است‌که همیشه مثبت است.

جدول تغییرات f برحسب تغییرات x چنین است:

x	$-\infty$	↗	۰	↗	۱	↗	۳	↗	$+\infty$
$f'(x)$			+		‖		+		
$f(x)$	۲	↗	۶	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	۰	↗	۲

چنانچه در سال سوم دیده‌اید دو خط $x=۱$ و $y=۲$ مجانبهای نمودار تابع می‌باشند و نمودار تابع f نسبت به‌محورهای مختصات درشکل زیر رسم شده است.



البته توجه کرده‌اید که :

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = -\infty$$

بررسی قضایای حدود:

اینك به ذکر برخی از قضایای حد که اکثر آنها را درسال سوم دیده‌اید می‌پردازیم.

۱ - ۱۱ - دوتابع هم ارز - دوتابع f و g را در نظر می‌گیریم، اگراین دوتابع در x_0 حد داشته و بعلاوه $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=۱$ آن دو تابع را وقتی x به سمت x_0 میل کند هم ارز گویند و می‌نویسند $f \sim g$. در تعریف فوق x_0 می‌تواند هر عدد حقیقی، $+\infty$ یا $-\infty$ و یا ∞ باشد.

مثال ۱ - تابع‌های $\sin x$ و x وقتی x به‌سمت صفر میل می‌کند هم‌ارز می‌باشند. (اثبات این مطلب را در سال سوم دیده‌اید):

$$\underset{x\to 0^-}{\text{حد}}\ \frac{\sin x}{x} = \underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\ \frac{\sin x}{x} = 1$$

درمحاسبهٔ حدیك عبارت در نقطهٔ x_0 می‌توان به جای هر تابع شرکت کننده در آن عبارت تابعی هم‌ارز آن (وقتی x به‌سمت x_0 میل‌کند) را قرار داد.

مثال۲ - می‌توانیم از این خاصیت مثلاً در مورد پیداکردن حد تابع $\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$ استفاده کنیم ، یعنی به‌جای هرتابع هم ارز آنرا قرار بدهیم ، پس خواهیم داشت.

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\ \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \underset{x\to 0}{\text{حد}}\ \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

در قضایای زیر منظور از یك تابع حددار تابعی‌است که حد داشته وحدش باپایان باشد.

۱ - ۱۲ - قضیه - حد مجموع دوتابع حد دار مساوی است با مجموع حدود آنها
این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم .

مثال -

$$\underset{x\to \frac{1}{2}}{\text{حد}}\ ([x]+|x-1|) = \underset{x\to \frac{1}{2}}{\text{حد}}\ [x] + \underset{x\to \frac{1}{2}}{\text{حد}}\ |x-1| =$$

$$\underset{x\to \frac{1}{2}}{\text{حد}}\ 0 + \underset{x\to \frac{1}{2}}{\text{حد}}\ (-x+1) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۱ -۱۳ - قضیه - اگر تابع حدداری را در عدد ثابتی ضرب کنیم حد آن در همان عدد ضرب خواهد شد.

اثبات ــ فرض کنید که $\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ f(x) = L$ ، که‌در آن L عددی است حقیقی. فرض‌کنید λ عددی است‌ثابت . اگر $\lambda = 0$ آنوقت تابع $\lambda f(x)$ در دامنهٔ تعریفش متحد باصفر بوده و در نتیجه:

$$\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ \lambda f(x) = 0 = 0 \times L$$

پس فرض کنید $\lambda \neq 0$. باید نشان دهیم که:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \alpha > 0 \ni 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |\lambda f(x) - \lambda L| < \beta \qquad (1)$$

چون $\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ f(x) = L$ پس‌در ازای $\frac{\beta}{|\lambda|} > 0$ یك $\alpha_1 > 0$ موجود است به قسمی که :

$$0<|x-x_0|<\alpha_1 \Rightarrow |f(x)-L|<\frac{\beta}{|\lambda|}$$

ویا

$$0<|x-x_0|<\alpha_1 \Rightarrow |\lambda|\ |f(x)-L|<\beta$$

ویا

$$0<|x-x_0|<\alpha_1 \Rightarrow |\lambda f(x)-\lambda L|<\beta$$

پس دیده می‌شود که کافیست α رادر استلزام (۱) برابر α_1 اختیار کنیم تا به‌یك گزارهٔ درست تبدیل شود .

مثال -

$$\lim_{x\to 0}\left(-2\frac{\sin x}{x}\right)=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-2\times 1=-2$$

۱ - ۱۴ - قضیه - حد تفاضل دو تابع حددار مساوی است با تفاضل حدود آنها

اثبات ـ کافی است که برای اثبات این قضیه از دو قضیهٔ پیش استفاده کنیم .

۱ - ۱۵ - قضیه - حد حاصل ضرب دو تابع حددار مساوی است با حاصلضرب حدود آنها .

از اثبات این قضیه نیز صرفنظر می‌کنیم.

مثال -

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\sin x\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)=$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\sin x\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=0\times 1=0$$

تبصره ـ قضایای ۱ـ۱۲ و ۱ـ۱۵ را می‌توان در مورد چند تابع نیز بیان کرد.

۱-۱۶- قضیه - حد خارج قسمت دو تابع حددار مساوی است با خارج قسمت حدهای آنها به‌شرطی که حد مخرج صفر نباشد.

این قضیه را نیز بدون اثبات می‌پذیریم .

۱-۱۷- قضیه - حد ریشهٔ n ام باتوان nام یك تابع حد دار مساوی با ریشهٔ n ام باتوان nام حد همان تابع است .

اثبات ـ برای حالت توان n ام قضیه را ثابت می‌کنیم . فرض کنید که $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

بنا به تبصرهٔ فوق داریم

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = \underbrace{(\lim_{x\to x_0} f(x))\,(\lim_{x\to x_0} f(x))\cdots(\lim_{x\to x_0} f(x))}_{\text{بار } n} =$$

$$\underbrace{L\times L\times\cdots\times L}_{\text{بار } n} = L^n$$

تبصره ـ این قضیه‌ها درحالتی‌که x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند نیزصادق می‌باشند. البته توجه دارید که دراین قضایا فرض شده است که حدود توابع مورد بحث باپایان هستند و بینهـایت نمی‌باشند . درغیر این صورت می‌توانیم نتایج زیررا اضافه کنیم :

I ـ اگر f به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ یا ∞ و g به‌سمت مقدار باپایانی میل کند مجموع $f+g$ به‌ترتیب به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ یا ∞ میل خواهدکرد .

II ـ اگر f به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ یا ∞ و g به‌سمت مقدار با پایانی غیر صفر میل کند حاصل ضرب $f.g$ به ترتیب به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ یا ∞ میل‌خواهدکرداگرحدg مثبت‌وبه‌سمت $-\infty$ یا $+\infty$ یا ∞ میل خواهد کرد اگر حد g منفی باشد .

III ـ اگر f به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ یا ∞ و g به‌سمت‌یک‌حد باپایان‌میل‌کند خارج قسمت $\frac{f}{g}$ به سمت یکی ازسه حد ∞ یا $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهدکرد .

IV ـ اگر g به سمت صفر و f به سمت یك حد با پایان غیر صفر میل کند خارج قسمت $\frac{f}{g}$ به سمت ∞ یا $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهدکرد .

V ـ اگر g به سمت ∞ یا $-\infty$ یا $+\infty$ و f به سمت یك حد باپایان میل کند خارج‌قسمت $\frac{f}{g}$ به سمت صفر میل خواهدکرد .

۱ ـ ۱۸ ـ قضیه ـ اگر x به سمت صفر میل‌کند هرچند جمله‌ای از x هم ارز جمله‌ای از آن چند جمله‌ای خواهد بودکه دارای کوچکترین توان است.

اثبات ـ فرض‌کنیم چندجمله‌ای $P(x)$ به‌صورت زیر باشد :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots + a_m x^m \;،\; m>n\geqslant 0 \text{ و } a_n\neq 0 \text{ و } a_m\neq 0$$

ازجملهٔ اول که دارای کوچکترین توان‌است فاکتور می گیریم ، خواهیم داشت :

$$P(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_n}x + \cdots \frac{a_m}{a_n}x^{m-n}\right)$$

حال اگر x بەسمت صفر میل کند داخل پرانتز بەسمت ۱ میل می‌کند و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{a_m x^n} = ۱$$

پس $P(x) \sim a_n x^n$ وقتی $x \to ۰$

۱ - ۱۹- قضیه - اگر x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند هرچند جمله‌ای از x هم‌ارز آن جمله‌ای ازچند جمله‌ای خواهد بود که دارای بزرگترین توان است.

اثبات- فرض کنیم چند جمله‌ای $P(x)$ بەشکل زیر باشد:

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-۱} x^{m-۱} + \cdots + a_۰ \quad ، \quad a_m \neq ۰$$

ازجملهٔ اول که دارای بزرگترین توان است فاکتور می‌گیریم خواهیم داشت:

$$P(x) = a_m x^m \left(۱ + \frac{a_{m-۱}}{a_m x} + \cdots + \frac{a_n}{a_m x^m} \right)$$

اگر x بەسمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند داخل پرانتز بەسمت ۱ میل خواهد کرد و در نتیجه :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{a_m x^m} = ۱ \quad \Longrightarrow \underset{x\to\pm\infty}{P(x)} \sim \underset{x\to\pm\infty}{a_m x^m}$$

۱ - ۲۰ - مسئله اصلی - اینك یك مسئلهٔ اساسی‌را که عبارت ازپیدا کردن حد یك تابع است مطرح می‌کنیم . در خیلی ازتوابع به صورت $f{:}x \longrightarrow y = f(x)$ وقتی که x به سمت مقدار ثابت $x_۰$ میل می‌کند حد تابع f همان مقدار $f(x_۰)$ می‌شود.

ایـن موضوع ممکن است شما را بـه اشتباه بیندازد و تصورکنیدکه هروقت $f(x_۰)$ را حساب‌کردید حتماً حد تابع است و هروقت $f(x_۰)$ وجود ندارد حتماً حدی برای تابع‌نیست. درصورتی که مطلب غیرازاین است؛ چه بسا که $f(x_۰)$ وجود دارد ولی حد وجود ندارد وچه بسا که $f(x_۰)$ وجود ندارد ولی حد وجود دارد وچه بسا که هردو وجود دارند ولی بایکدیگر مساوی نیستند .

مثال ۱ - تابع $f(x) = x + ۲ + \sqrt{x}$ داده شده است. اگر x بەسمت صفر میل‌کند حد تابع وهمچنین$f(۰)$ را حساب‌کنید .

حل- ملاحظه می‌شودکه $f(۰) = ۲$ است ولی‌اگر **x بەسمت صفرمیل‌بکند تابع حدندارد** زیرا که حدچپ ندارد یعنی مقدار «$\lim_{x\to ۰^-}(x + ۲ + \sqrt{x})$» **موجود نیست.**

مثال ۲ - تابع f بەوسیله دستور $f(x) = x + ۲$ برای اعداد غیردرست تعریف شده‌است

وقتی x به سمت ۲ میل‌کند حد این تابع را حساب کنید.

حل ــ چون ۲ عددی درست است بنابراین $f(۲)$ وجود ندارد. ولی تابع حد دارد زیرا وقتی x به‌سمت ۲ میل می‌کند x مخالف ۲ است ودر نتیجه $f(x)=x+۲$ واز این روی حدش همان حد تابع $x+۲$ است که برابر ۴ می‌باشد.

مثال ۳ ــ تابع
$$g(x)=\begin{cases} x+۲ & \text{اگر } x \text{ عددی درست نباشد} \\ ۰ & \text{اگر } x \text{ عددی درست باشد} \end{cases}$$
داده شده است

$\lim\limits_{x\to ۲} g(x)$ حد ومقدار $g(۲)$ را محاسبه کنید. آیا این دو مساوی‌اند؟

حل ــ وقتی x عددی درست نباشد $g(x)$ برابر است با همان $f(x)$ درمثال ۲. از طرفی می‌دانیم که حد یك تابع دریك نقطه به مقدار خود تابع درآن نقطه بستگی ندارد پس حدg وحد f وقتی x بــه سمت ۲ میل کند یکی هستـنـد. پس این حـد مشتـرك عدد ۴ می‌باشد. اما مقدار g در نقطه $x=۲$ برابر صفراست ودیده میشود.

$$\lim_{x\to ۲} g(x)=۴\neq ۰=g(۲)$$

از این مقدمه چنین نتیجه می‌شود که وجود $f(x_۰)$ برای موجود بودن حد وقتی‌که x به‌سمت $x_۰$ میل می‌کند نه شرط لازم است ونه شرط‌کافی، و فقط در توابع پیوسته است‌که حد تابع با مقدار $f(x_۰)$ مساوی می‌شود. بررسی تابع پیوسته را سال گذشته دیده‌اید در اینجانیز تکرار خواهیم‌کرد، ازطـرف دیگر تشخیص تابع پیوسته از تابع غیرپیوسته بازبه خود مسئلهٔ حد برمی گردد.

۱ ــ ۲۱ ــ صورتهای مبهم ــ حتماً تاکنون در بررسی مسائل حد به صورتهای

$$\frac{۰}{۰}\text{،}\ \frac{\infty}{\infty}\text{،}\ ۰\times\infty\ \text{و}\ \infty-\infty$$

برخورده‌اید. این صورتها را صورتهای مبهم می‌گویند زیرا مقادیری‌که سرانجام برای هر یك از آنها بدست خواهیم آورد معمولا از مسئله‌ای بمسئله دیگر فرق می‌کند. سه‌صورت $\frac{\infty}{\infty}$ و $۰\times\infty$ و $\infty-\infty$ قابل تبدیل به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ می‌باشند. درزیر باذکر چند مثال روش رفع ابهام ازاین صور را بیان خواهیم‌کرد.

مثال ۱ ــ حد تابع $f(x)=\frac{۵x+۲}{۲x-۱}$ را وقتیکه x به سمت $\pm\infty$ میل می‌کند تعیین‌کنید.

حل ــ این‌کسر به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ درمی‌آیدکه با استفاده از قضیهٔ ۱ــ۱۹ وآنچه که درزیرمثال

شماره ۱-۱۱ گفتیم خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+2}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+2}{2x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$$

البته حدفوق را می‌توان به‌کمك قاعدهٔ هوپیتال (که درسال سوم دیده‌اید) نیز بدست آورد.

مثال ۲ - حد تابع $f(x)=\frac{2x^2-3}{5x^2+5x+1}$ را وقتی‌که x به سمت $\pm\infty$ میل‌می‌کند تعیین کنید:

حل - این کسر نیز به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ در می‌آید که مانند مثال قبل می‌توان عمل کرد.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-3}{5x^2+5x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{5x^2}=\frac{2}{5}$$

مثال ۳ - حد تابع $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ را وقتی‌که x به سمت ۱ میل می‌کند پیدا کنید:

حل - این کسر به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید، برای رفع ابهام صورت ومخرج کسررا تجزیه می‌کنیم ، خواهیم داشت :

$$\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

عامل مشترك $x-1$ را که در صورت ومخرج باعث حالت ابهام می‌شود حذف می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$$

مثال ۴ - حد تابع $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}-x$ را وقتی کـه x بـه سمت $+\infty$ میل می‌کند پیدا کنید:

حل - ملاحظه می‌کنیم که تابع دراین صورت‌مبهم است و به حالت $\infty-\infty$ درمی‌آید.
برای رفع ابهام تابع و پیدا کردن حدآن به روش زیر عمل‌می‌کنیم :
صورت ومخرج کسر را درمزدوج صورت ضرب می کنیم ، خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-x}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+2x+5}-x\right]\left[\sqrt{x^2+2x+5}+x\right]}{\left[\sqrt{x^2+2x+5}+x\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+5-x^2}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right]} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

در تساوی ماقبل آخر از این مطلب که $2x \sim (2x+5)$ و $2x \sim \left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)x$ وقتی $x\to+\infty$ استفاده شده است.

مثال ۵ ــ حد تابع $f(x)=x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ را وقتیکه x به سمت صفر میل می‌کند در صورت وجود تعیین کنید:

حل ــ وقتی x به سمت صفر میل می‌کند $f(x)$ به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درمی‌آید. برای رفع ابهام تابع را چنین می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{اگر } x>0 \\ x-1 & \text{اگر } x<0 \end{cases}$$

حد چپ تابع ۱ــ وحد راست آن ۱+ است، پس این تابع حد ندارد.

مثال۶ــ حد تابع $f(x)=\frac{\sin 3x}{5x}$ را وقتی‌که x به سمت صفر میل می‌کند تعیین‌کنید:

حل ــ وقتی x به سمت صفرمیل می‌کند تابع به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درمی‌آید. برای رفع‌ابهام دو روش داریم:

روش‌اول ــ استفاده از قانون‌هوپیتال.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{5x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\cos 3x}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

روش‌دوم ــ استفاده از توابع هم ارز ــ داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

مثال ۷ ــ حدتابع $f(x)=x\cot x$ را وقتی x به سمت صفرمیل می‌کند تعیین کنید:

حل ــ وقتی x به سمت صفرمیل‌کند این تابع به صورت مبهم $0\times\infty$ درمی‌آید. برای‌رفع ابهام چنین عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0} x\cot x = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\cos x =$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)=1\times 1=1$$

تمرین :

حد تابعهای زیر را در نقاط داده شده پیدا کنید

۱ـ $f: x \longmapsto \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2-1}$ ، $x\to 1$

۲ـ $f: x \longmapsto \dfrac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4}$ ، $x\to 1$

۳ـ $f: x \longmapsto \dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-5x+4}$ ، $x\to 1$

۴ـ $f: x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ ، $x\to 4$

۵ـ $f: x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ ، $x\to 0^+$

۶ـ $f: x \longmapsto \dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{x}$ ، $x\to 0$

۷ـ $f: x \longmapsto \dfrac{x^n-a^n}{a^p-x^p}$ $n,p\in N$ ، $x\to a$

۸ـ $f: x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ ، $x\to 0$

۹ـ $f: x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ ، $x\to 4$

۱۰ـ $f: x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ ، $x\to 2$

۱۱ـ $f: x \longmapsto \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}$ ، $x\to 8$

۱۲ـ $f: x \longmapsto \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ ، $x\to 1$

۱۳ـ $f: x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$ ، $x\to 0$

۱۴ـ $f: x \longmapsto \dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}$ ، $x\to 1$

۱۵ـ $f: x \longmapsto \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ ، $x\to 2$

۱۶− $f:x \longmapsto \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} \qquad a>0 \quad , \quad x\to a$

۱۷− $f:x \longmapsto \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x} \quad , \quad x\to 0$

۱۸− $f:x \longmapsto \dfrac{\sin 3x}{tg 5x} \quad , \quad x\to 0$

۱۹− $f:x \longrightarrow \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x} \quad , \quad x\to 0$

۲۰− $f:x \longmapsto \dfrac{\sin^2 x}{\sin 2x} \quad , \quad x\to 0$

۲۱− $f:x \longmapsto \dfrac{\sin^2 x}{tg^2 x} \quad , \quad x\to 0$

۲۲− $f:x \longmapsto (1+\cos x)\, tg\dfrac{x}{2} \quad , \quad x\to \pi$

۲۳− $f:x \longmapsto \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} \quad , \quad x\to 0$

۲۴− $f:x \longmapsto (\sin x-1)\, tg^2 x \quad , \quad x\to \dfrac{\pi}{2}$

۲۵− $f:x \longmapsto \dfrac{\cos x-\cos a}{\sin x-\sin a} \quad , \quad x\to a$

حد توابع زیررا درصورتی که x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند به دست آورید.

۲۶− $f:x \longmapsto \dfrac{x^3-5x+1}{x^2+2}$

۲۷− $f:x \longmapsto \dfrac{x^8+2x-5}{x^8-7}$

۲۸− $f:x \longmapsto \dfrac{x^3-7x+1}{3x^2-4}$

۲۹− $f:x \longmapsto \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

۳۰− $f:x \longmapsto \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

۳۱− $f:x \longmapsto \sqrt{x^2+x}-x$

۳۲− $f:x \longmapsto \sqrt{x^2+ax+b}-x$

۳۳- $f: x \longmapsto \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}$

۳۴- $f: x \longmapsto \sqrt{x^4+2x}-x^2$

۳۵- $f: x \longmapsto \sqrt{x^4+4}-\sqrt{x+1}$

۳۶- $f: x \longmapsto \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}$

۳۷- $f: x \longmapsto \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^4+1}}$

۳۸- $f: x \longmapsto \dfrac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$

۳۹- $f: x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$

۴۰- $f: x \longmapsto \sqrt{x^4+x-2}-(x^2-1)$

۴۱- $f: x \longmapsto \sqrt{x^2+ax+1}-(ax+b) \quad \rightarrow$ (بحث)

پیوستگی تابع

۱ - ۲۲ - پیوستگی تابع در یك نقطه - موضوع پیوستگی تابع‌را درسال سوم دیده‌اید . اینك‌آن را یاد آوری می‌کنیم.

تعریف - تابع f را درنقطهٔ x_0 پیوسته گویند هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱- f در x_0 تعریف شده باشد یا به عبارت دیگر $x_0 \in D_f$

۲- وقتی x به سمت x_0 میل‌کند تابع f حد داشته باشد

۳- این حد برابر مقدار تابع در x_0 باشد یعنی $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ حد

اگر تابعی دریك نقطه پیوسته نباشد آن را در آن نقطه گسسته یامنفصل گویند . هما نطورکه در مورد توابع حد از سمت چپ وحد از سمت راست را در یك نقطه تعریف کردیم می‌توان بطور مشابه پیوستگی از سمت چپ وپیوستگی ازسمت راست را در یك نقطه تعریف کرد. برای این منظورکافیست‌که در تعریف فوق ، همه‌جا بجای حد به ترتیب حد از سمت چپ وحد ازسمت راست را قرار دهیم.

تابع f را در یك فاصله‌پیوسته گویند هرگاه‌درهریك ازنقاط آن فاصله‌پیوسته باشد. چنانچه

این‌فاصله شامل نقاط‌انتهائی‌اش باشد منظور ازپیوستگی‌دراین نقاط‌پیوستگی‌ازسمت چپ یاازسمت راست (برحسب مورد) است.

تبصره ۱ - مرسوم است‌که سه شرط ۱ و ۲ و ۳ در تعریف پیوستگی را یکجا با نوشتن $\lim_{x \to x_\circ} f(x)=f(x_\circ)$ حد بیان کنند. توجه‌کنید‌که وقتی چنین می‌نویسیم منظورمان اینست‌که هرسه‌شرط تعریف برقرار است.

تبصره ۲ - باتوجه به تعریف حد می‌توان تعریف پیوستگی را برحسب نمادهای α و β چنین بیان داشت:

$$\forall \beta > \circ \exists \alpha > \circ \ni |x - x_\circ| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_\circ)| < \beta$$

توجه‌کنید که در اینجا شرط $|x - x_\circ| > \circ$ حذف شده است زیرا اولا f در $x_\circ$ تعریف شده وثانیاً طرف دوم استلزام فوق به‌ازای $x = x_\circ$ به صورت $|f(x_\circ) - f(x_\circ)| < \beta$ درمی‌آید که یك نامساوی درست است.

مثال ۱ - تابع $f(x) = x^۲$ درنقطهٔ به طول صفر پیوسته است زیرا که:

$$\lim_{x \to \circ} x^۲ = \circ = f(\circ)$$

مثال ۲ - تابع $f(x) = \sqrt{x}$ درنقطهٔ به‌طول صفر گسسته است زیرا که در صفر حد چپ ندارد و در نتیجه دارای حد نیست. اما این تابع درنقطهٔ صفر از سمت راست پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x \to \circ^+} \sqrt{x} = \circ = f(\circ)$$

مثال ۳ - تابع

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x \neq ۲ \\ ۴ & \text{اگر } x = ۲ \end{cases}$$

در نقطهٔ به طول ۲ پیوسته نیست و گسسته است زیرا که:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = ۲ \neq ۴ = f(۲)$$

۱ - ۲۳ - قضایای پیوستگی - فرض‌کنیم $x_\circ$ و λ دو مقدار حقیقی و f و g توابعی پیوسته در $x_\circ$ باشند، قضایای زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم:

قضیهٔ اول - تابع λf درنقطهٔ $x_\circ$ پیوسته خواهد بود؛

قضیهٔ دوم - تابع $f+g$ درنقطهٔ $x_\circ$ پیوسته خواهد بود؛

قضیهٔ سوم - تابع $f-g$ در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته خواهد بود؛

قضیهٔ چهارم - تابع $f.g$ درنقطهٔ $x_\circ$ پیوسته خواهد بود؛

قضیهٔ پنجم ــ تابع $\frac{f}{g}$ به شرط $g(x_\circ)\neq\circ$ در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته خواهد بود.

مثال ۱ ــ تابع $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ درتمام نقاط به استثنای صفر پیوسته است.

مثال ۲ــ تابع $x \mapsto tg x$ در دامنهٔ تعریفش پیوسته است

مثال ۳ ــ تابع $x \mapsto ۴x^۲+۲x+۳$ درتمام نقاط پیوسته است. برای اینکه از جمع سه تابع پیوسته به‌وجودآمده است.

مثال ۴ ــ تابع $x \mapsto \frac{۴x^۲+۲x+۱}{x-۱}$ به ازای هر $x\neq۱$ پیوسته است.

مثال ۵ ــ تابع $x \mapsto x^۳-۱$ پیوسته است.

مثال ۶ ــ همانطورکه درکتاب حساب وجبرسال سوم دیده‌اید حد هر چند جمله‌ای در هر نقطه برابر است با مقدار آن چند جمله‌ای درآن نقطه بنابراین هرتابع چند جمله‌ای در تمام‌نقاط پیوسته است.

مثال ۷ ــ اگر $p(x)$ و $q(x)$ دوچندجمله‌ای باشند خارج قسمت‌آنها $\frac{p(x)}{q(x)}$ درهر نقطه که به ازای آن $q(x)\neq\circ$ پیوسته است (بنا به قضیه ۵و مثال ۶فوق).

۱ــ۲۴ــ نمایش حد و پیوستگی به‌وسیله شکل ــ بدواً توجه می کنیم که اگر a عددی مثبت باشد آنوقت:

$$|t|<a \Leftrightarrow -a<t<a$$

یك راه ساده برای اثبات مطلب فوق چنین است:

قدر مطلق t فاصله نقطه t را تا نقطهٔ صفر نشان می‌دهد و $|t|<a$ بیان می‌کند‌که فاصلهٔ t از صفرکمتراز a می‌باشد. چنانچه مطلب اخیررا روی محور اعداد حقیقی تعبیرکنیم معلوم‌میشود که t عددی بین $a-$ و a می‌باشد یعنی $-a<t<a$ و به عکس اگر t بین $a-$ و a باشد آنوقت فاصله‌اش از صفر کمتر از a بوده و درنتیجه $|t|<a$.

حال فرض‌کنید α و β اعدادی مثبت باشند، از آنچه گذشت نتیجه میشود که:

$$\circ<|x-x_\circ|<\alpha \Leftrightarrow -\alpha<x-x_\circ<\alpha \text{ و } x\neq x_\circ$$

یا

$$\circ<|x-x_\circ|<\alpha \Leftrightarrow x_\circ-\alpha<x<x_\circ+\alpha \text{ و } x\neq x_\circ$$

ویا

$$\circ<|x-x_\circ|<\alpha \Leftrightarrow x\in]x_\circ-\alpha \text{ و } x_\circ+\alpha[-\{x_\circ\}$$

وهمینطور

$$|f(x)-L|<\beta \Leftrightarrow -\beta<f(x)-L<\beta$$

یا

$$|f(x)-L|<\beta \Leftrightarrow L-\beta<f(x)<L+\beta$$

ویا

$$|f(x)-L|<\beta \Leftrightarrow f(x)\in]L-\beta \text{ و } L+\beta[$$

باتوجه به مطالب فوق تعریف حد وپیوستگی را به ترتیب می‌توان به صورتهای زیر بیان کرد :

الف- حد

$$\forall\beta>\circ\exists\alpha>\circ\ni x\in]x_\circ-\alpha \text{ و } x_\circ+\alpha[-\{x_\circ\}\Longrightarrow f(x)\in]L-\beta \text{ و } L+\beta[$$

یعنی به ازای هر فاصلهٔ باز به شکل $]L-\beta$ و $L+\beta[$ که حول L در نظر بگیریم یك فاصلهٔ باز بدون مرکز $]x_\circ-\alpha$ و $x_\circ+\alpha[$ حول $x_\circ$ موجوداست به قسمی که اگر x از فاصلهٔ اخیرانتخاب شود $f(x)$ متعلق به‌فاصلهٔ اول باشد.

ب- پیوستگی

$$\forall\beta>\circ\ \exists\alpha>\circ\ni x\in]x_\circ-\alpha \text{ و } x_\circ+\alpha[\Longrightarrow f(x)\in]f(x_\circ)-\beta \text{ و } f(x_\circ)+\beta[$$

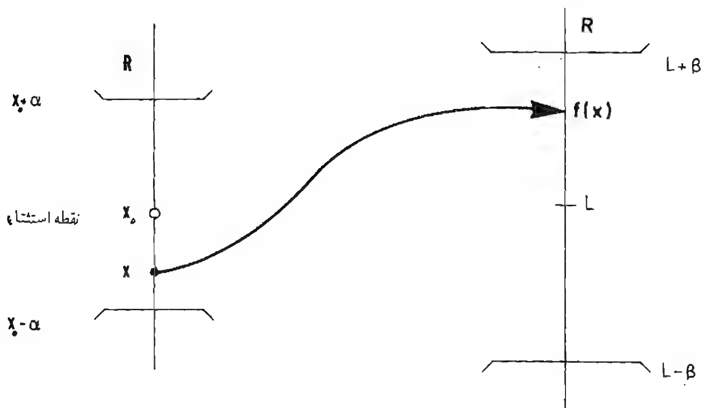
یعنی به ازای هرفاصله باز به شکل $]f(x_\circ)-\beta$ و $f(x_\circ)+\beta[$ حول $f(x_\circ)$ یك‌فاصلهٔ باز مانند $]x_\circ-\alpha$ و $x_\circ+\alpha[$ حول $x_\circ$ موجود است به‌قسمی که اگر x درفاصلهٔ اخیر انتخاب شود $f(x)$ متعلق به فاصلهٔ اول باشد.

نظیراین مطالب را می‌توان در مورد حدچپ وحدراست وپیوستگی از چپ و پیوستگی از راست نیز بیان کرد که مادراینجا از بیان آنها خودداری می‌کنیم.

شکلهای زیر مطالب فوق را مجسم می‌کنند.

حددرحالتهای سه گانه

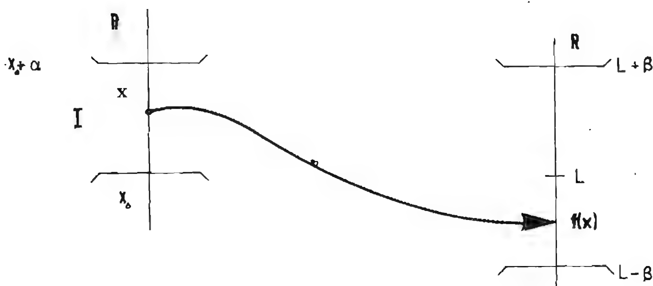
این شکل حد را نشان می‌دهد



$x \in]x_0-\alpha$ و $x_0+\alpha[- \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in]L-\beta$ و $L+\beta[$

$x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to L$

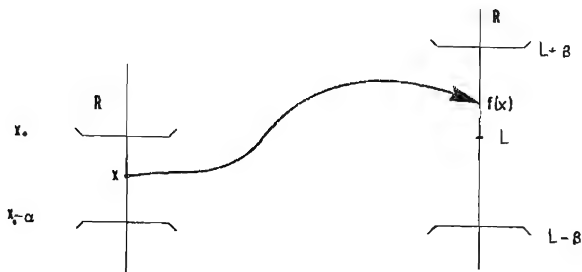
این شکل حد راست را نشان می‌دهد



$x \in]x_0$ و $x_0+\alpha[\Longrightarrow f(x) \in]L-\beta$ و $L+\beta[$

$x \to x_0^+ \Longrightarrow f(x) \to L$

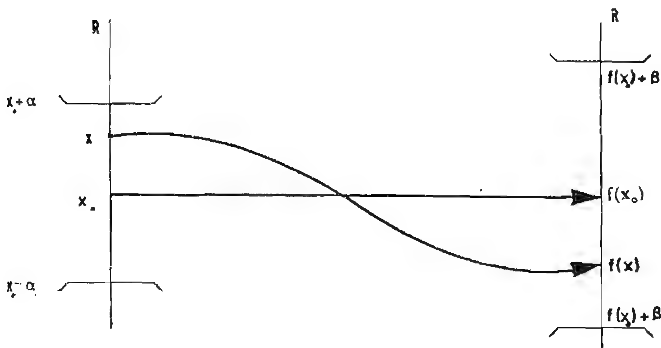
این شکل حد چپ را نشان می‌دهد



$$x\in]x_0-\alpha \text{ و } x_0[\Rightarrow f(x)\in]L-\beta \text{ و } L+\beta[$$
$$x\to \bar{x}_0 \Rightarrow f(x)\to L$$

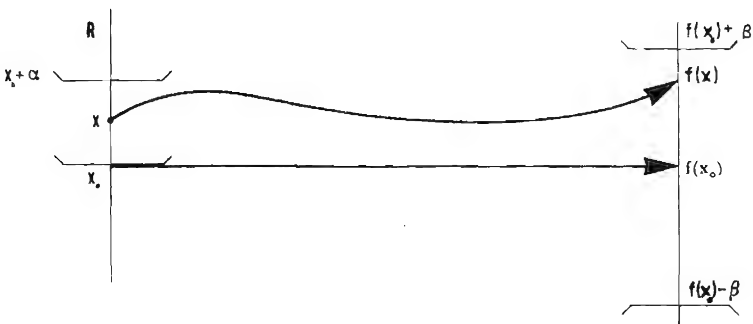
پیوستگی در حالتهای سه گانه

این شکل پیوستگی را نشان می‌دهد



$$x\in]x_0-\alpha \text{ و } x_0+\alpha]\Rightarrow f(x)\in]f(x_0)-\beta \text{ و } f(x_0)+\beta[$$
$$x\to x_0\Rightarrow f(x)\to f(x_0)$$

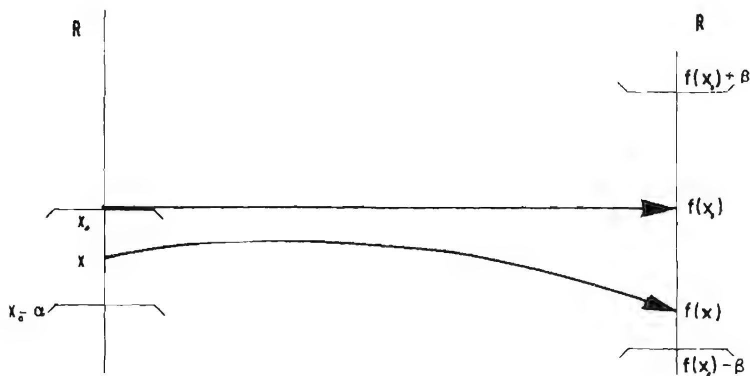
ین شکل پیوستگی راست را نشان می‌دهد



$$x \in [x_0 \text{ و } x_0+\alpha[\Rightarrow f(x) \in]f(x_0)-\beta \text{ و } f(x_0)+\beta[$$

$$x \to x_0^{+} \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$$

این شکل پیوستگی چپ راشان می‌دهد



$$x \in]x_0-\alpha \text{ و } x_0] \Rightarrow f(x) \in]f(x_0)-\beta \text{ و } f(x_0)+\beta[$$

$$x \to x_0^{-} \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$$

تمرین

الف ــ پیوستگی : مسائل زیر را با مراجعه به‌تعریف شماره ۱ــ۲۲ (بدون استفاده از بحث $\beta\alpha$) حل کنید.

۱ــ ثابت کنید که تابـــع $f: x \longmapsto \frac{x+3}{x-2}$ در نقطهٔ $x_0=1$ پیوسته است

۲ــ ثابت‌کنید که تابع $f: x \longmapsto x^3+2x-3$ در نقطهٔ $x_0=2$ پیوسته است

۳ــ ثابت کنید که تابــع $f: x \longmapsto \frac{2}{(x+1)^2}$ در نقطهٔ $x_0=0$ پیوسته است

۴ــ ثابت کنید که تابـــع $f: x \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x-1}$ در نقطهٔ $x_0=2$ پیوسته است

۵ــ ثابت‌کنید‌که تابع $f: x \longmapsto (x-1)(1-x)(x+5)$ در نقطهٔ $x_0=1$ پیوسته است

۶ــ ثابت‌کنید‌که تابع $f: x \longmapsto \sqrt{1+x}$ در نقطهٔ $x_0=2$ پیوسته است

۷ــ تابع f به وسیلهٔ دستور زیر داده شده است:

$$f(x)=\begin{cases} |x-2| & \text{اگر } x\neq 2 \\ 1 & \text{اگر } x=2 \end{cases}$$

ثابت‌کنید‌که تابع f درنقطهٔ $x_0=2$ ناپیوسته است. آیا در نقطهٔ مزبور پیوستگی راست یا چپ دارد؟

۸ ــ تابع f به‌وسیلهٔ دستور زیر داده شده است :

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{اگر } x<0 \\ x^2 & \text{اگر } x\geqslant 0 \end{cases}$$

ثابت‌کنید‌که تابع f درنقطهٔ $x_0=0$ ناپیوسته است. آیا در نقطهٔ مزبور پیوستگی راست یا چپ دارد؟

۹ــ تابع f به‌وسیلهٔ دستور زیر داده شده است :

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{اگر } x>1 \\ 2x-2 & \text{اگر } x<1 \\ 0 & \text{اگر } x=1 \end{cases}$$

ثابت‌کنید‌که این تابع در نقطهٔ $x_0=1$ ناپیوسته است. آیا در نقطهٔ مزبور پیوستگی راست یا چپ دارد؟

۱۰ــ تابع f به وسیلهٔ دستور $f(x)=3x+\frac{|2x|}{x}$ و $f(0)=2$ داده شده است.

پیوستگی آنرا در نقطهٔ $x_0=0$ بررسی کرده و نمودار آنرا در صفحهٔ محورهای قائم رسم کنید.

۱۱ـ همان سؤال مسئله ۱۰ برای تابع g با دستور : $g(x)=3x+\frac{|2x|}{|x|}$

۱۲ـ تابع f بادستور زیر داده شده است :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} & \text{اگر } x\neq 1 \\ 2 & \text{اگر } x=1 \end{cases}$$

پیوستگی تابع را در نقطهٔ $x_0=1$ بررسی کرده و نمودار آن را در صفحهٔ مختصات قائم رسم کنید.

۱۳ـ تابع $f:x\mapsto(-1)^{[x]}(x-[x])$ که در آن $[x]$ بزرگترین عدد درست کوچکتر یامساوی x است مفروض است :

پیوستگی این تابع را در هرنقطه از دامنهٔ تعریفش بررسی کنید و در فاصلهٔ $[-3,3]$ نمودار آن را رسم کنید.

۱۴ـ همان سؤال برای تابع :

$$f:\ x\longmapsto\frac{x}{1+[x]}$$

۱۵ـ همان سؤال برای تابع:

$$f:x\longmapsto[x]+[-x]$$

ب ـ حد: مسائل زیر را با مراجعه به تعریف حد حل کنید.

۱۶ـ ثابت کنید که:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

۱۷ـ ثابت کنید که:

$$\lim_{x\to 0}(x-1+|x-2|)=1$$

۱۸ـ

$$\lim_{x\to -2}\frac{|x|-2}{x^2-4}=\frac{1}{4}$$

۱۹ـ

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{|x-1|}=0$$

پ ـ حد راست یا چپ : بااستفاده ازقضایای حدنشان دهیدکه :

۲۰ــ $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^3+8}{|x+2|} = 12$

۲۱ــ $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^3+8}{|x+2|} = -12$

ت ــ حدهای بینهایت: با استفاده از قضایای حد نشان دهید که:

۲۲ــ $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{x-1} = +\infty$

۲۳ــ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2}{(x-1)^2} = -\infty$

۲۴ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x^2} = 0$

۲۵ــ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 1$

۲۶ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = +\infty$

۲۷ــ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^4+x^2} = +\infty$

۲۸ــ $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-x}{x-1} = +\infty$

۲۹ــ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-4x+1}{x^2} = +\infty$

۱ــ۲۵ــ تابع مرکب ــ فرض کنید f و g توابعی با دامنه‌های D_f و D_g و بردهای R_f و R_g باشند. منظور از ترکیب f و g که آن را با $f \circ g$ (بخوانید f آ g یا f دایره g) نشان میدهند تابعی است که دامنهٔ آن:

$$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$$

و به صورت زیر تعریف شده است:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in D_{f \circ g}$$

تابع $f \circ g$ را یک تابع مرکب یا تابع تابع نیز می‌نامند

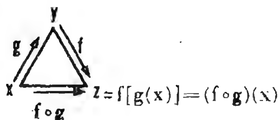
مثال — تابع‌های $f(x)=4x-1$ و $g(x)=x^2+1$ داده شده‌اند $f\circ g$ و $g\circ f$ را تعیین کنید.

حل : میدانیم $D_f=R$ و $D_g=R$ پس $D_{f\circ g}=R$ و $D_{g\circ f}=R$ وداریم :

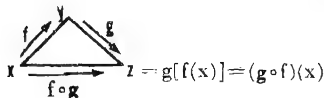
$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=4(x^2+1)-1=4x^2+3$$

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=(4x-1)^2+1=16x^2-8x+2$$

شکل‌های زیر در درک بیشتر مفهوم تابع تابع به ما کمک می‌کنند



$$x \xrightarrow{g} g(x)=y \xrightarrow{f} f(y)=f[g(x)]=(f\circ g)(x)$$



$$x \xrightarrow{f} f(x)=y \xrightarrow{g} g(y)=g[f(x)]=(g\circ f)(x)$$

می‌توان ترکیب بیش از دو تابع را نیز در نظر گرفت

مثال : تابعهای $f(x)=3x-1$ و $g(x)=2x+1$ و $h(x)=5x+2$ داده شده اند.

مطلوب است تعیین تابع‌های مرکب : $h\circ(g\circ f)$ و $(h\circ g)\circ f$. آیا این دو تابع مساوی‌اند؟

حل ـ دامنه‌های همهٔ توابع مجموعهٔ R است و داریم :

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=2(3x-1)+1=6x-1=z(x)$$

$$(h\circ(g\circ f))(x)=h[z(x)]=5(6x-1)+2=30x-3$$

$$(h\circ g)(x)=h[g(x)]=5(2x+1)+2=10x+7=z_1(x)$$

$$((h\circ g)\circ f)(x)=(z_1\circ f)(x)=z_1[f(x)]=10(3x-1)+7=30x-3$$

پس $h\circ(g\circ f)$ و $(h\circ g)\circ f$ با یکدیگر مساوی‌اند.

۱ـ۲۶ـ مشتق تابع مرکب ـ توابع مشتق پذیر f و g را در نظر می گیریم . می خواهیم ثابت کنیم که تابع مرکب $f\circ g$ مشتق پذیر است ومشتق آن را بدست‌آوریم.

برای رعایت اختصار فرض می‌کنیم

$g(x)=y$ و $f(g(x))=f(y)=z$

ملاحظه می‌شود که تابع z درعین حال تابع x وتابع y است وضمناً هما نطورکه در کتاب حساب وجبر سال سوم دیده‌اید هرتابع مشتق پذیر پیوسته است لذا g پیوسته بوده و $\Delta y\to 0$ هرگاه $\Delta x\to 0$ پس :

$$z'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta z}{\Delta x}\right] = \lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}\left[\frac{\Delta z}{\Delta y}\times\frac{\Delta y}{\Delta x}\right] = \left(\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

یعنی داریم :

$$z'_x = z'_y \times y'_x$$

به عبارت ساده‌تر:

$$[(f\circ g)(x)]' = f'(g(x))\cdot g'(x) = f'_y\ g'_x$$

$$(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'$$

مثال ۱ــ توابع f و g در زیرداده شده‌اند مشتق‌تابع مرکب $g\circ f$ را تعیین‌کنید وحاصل مشتق را به‌ازای $x=۲$ بدست آورید.

$f(x)=۳x-۵$ و $g(x)=۲x^۳-۱$

$(g\circ f)(x)=g[f(x)]$

$f(x)=۳x-۵=y$ و $f'(x)=۳$

$g(y)=۲y^۳+۱$ و $g'_y=۶y^۲$

$[(g\circ f)(x)]'=g'_y\cdot f'_x=۳\times ۶y^۲=۱۸y^۲=۱۸(۳x-۵)^۲$

$[(g\circ f)(x)]'=۱۸$: $x=۲$ به ازای

مثال ۲ــ تابعهای $y=f(x)=\sqrt{۲x+۱}$ و $z=g(y)=\dfrac{۳y-۱}{y}$ داده‌شده‌اند.

مشتق z را نسبت به x تعیین وبه ازای $x=۰$ آنرا حساب کنید .

$z=(g\circ f)(x)$

$$z'_x=z'_y\times y'_x=g'_y\times f'_x \quad \text{و} \quad y'_x=\frac{۱}{\sqrt{۲x+۱}} \quad \text{و} \quad z'_y=\frac{۱}{y^۲}$$

$$z'_x=\frac{۱}{y^۲}\times\frac{۱}{\sqrt{۲x+۱}}=\frac{۱}{(۲x+۱)\sqrt{۲x+۱}} \quad \text{و} \quad z'(۰)=۱$$

مثال ۳ـ تابع‌های f و g به‌ترتیب زیر داده شده‌اند :

$$f:x \mapsto -3x+2=f(x) \quad و \quad g:x \mapsto -x^2+1=g(x)$$

الف ـ مشتق‌های تابعهای $z=(g\circ f)(x)$ و $T=(f\circ g)(x)$ را تعیین و به‌ازاء $x=1$ مقدار هر یك را حساب کنید.

ب ـ تابعهای مرکب $z=(g\circ f)(x)$ و $T=(f\circ g)(x)$ راتعیین و باتعیین‌مشتق هرکدام درستی فرض الف را که حل کرده‌اید امتحان کنید.

حل: الف

$$z=(g\circ f)(x) \quad و \quad z'_x=g'_y\times f'_x$$
$$y=f(x)=-3x+2 \quad و \quad f'_x=-3$$
$$g(y)=-y^2+1 \quad و \quad g'_y=-2y$$

پس‌داریم:

$$z'_x=-2y\times -3=6y$$
$$z'_x=6(-3x+2)=-18x+12 \quad و \quad z'(1)=-6$$
$$T=(f\circ g)(x) \quad و \quad T'_x=f'_y\cdot g'_x$$
$$f(y)=-3y+2 \quad و \quad f'_y=-3$$
$$g(x)=-x^2+1 \quad و \quad g'_x=-2x$$
$$T'_x=-3\times -2x=6x \quad و \quad T(1)=6$$

حل: ب

$$z=(g\circ f)(x)=g[f(x)]=-(-3x+2)^2+1=-9x^2+12x-3$$
$$z'=-18x+12 \quad و \quad z'(1)=-6$$
$$T=(f\circ g)(x)=f[g(x)]=-3(-x^2+1)+2=3x^2-1$$
$$T'=6x \quad و \quad T'(1)=6$$

تمرین

۱ـ دوتابع f و g به‌ترتیب زیر تعریف شده‌اند :

$$f(x)=\frac{1}{4x-3} \quad و \quad g(x)=3x^2-4$$

الف : هریك ازتابعهای مرکب : $f\circ g$ و $g\circ f$ راتعیین کنید

ب: مشتق‌آنها را هم مستقیماً وهم بااستفاده از فرض الف تعیین کنید.

۲ـ تابع‌های f وg به‌صورت زیر داده شده‌اند :

$$f(x)=\sin x+\cos x \quad و \quad g(x)=x^2-x$$

مشتق هریك از تابع‌های مرکب $f\circ g$ و $g\circ f$ را تعیین کنید.

۳ـ به‌فرض اینکه تابع f مشتق داشته باشد، مشتق اول و دوم هریك از تابعهای $f(x^2)$ و $f(x^2)$ و $f(\frac{1}{x})$ را حساب کنید.

۴ـ توابع $f(t)=\sqrt{2t^2+1}$ و $g(t)=t^3+1$ داده شده‌اند

مطلوبست تعیین تابعهای مرکب $f\circ g$ و $g\circ f$ و سپس مشتق هریك از آنها را به ازای $t=1$ حساب کنید.

۵ـ تابع‌های f و g به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$f:x \longmapsto f(x)=\frac{x}{1+|x|}=y$$

$$g:y \longmapsto g(y)=\frac{y}{1-|y|}=z$$

الف ـ دامنهٔ تعریف وبرد هریك از دو تابع را بدست آورید

ب ـ تابع مرکب $h=g\circ f$ را تعیین کنید.

ج ـ مشتق تابع $h=g\circ f$ را بدست آورید.

۶ـ دوتابع $f(x)=-3x+2$ و $g(y)=-2y^2+y$ داده شده‌اند.

مطلوبست تابعهای مرکب $g\circ f$ و $f\circ g$ و محاسبهٔ مشتق هریك

۷ـ توابع زیر مفروض‌اند:

$$f(x)=\frac{2x}{x+1} \quad \text{و} \quad g(x)=x+2 \quad \text{و} \quad h(x)=4x-1$$

مطلوبست تعیین تابعهای مرکب $z_1=[(g\circ f)\circ h](x)$ و $z_2=[g\circ(f\circ h)](x)$ و تحقیق اینکه $z_1=z_2$ است.

۸ـ دوتابع h و T به‌صورتهای زیر داده شده‌اند

$$T(x)=4x-\frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad h(x)=\sin 2x+\cos 2x+1$$

الف ـ مطلوبست تعیین تابع‌های مرکب $h\circ T$ و $T\circ h$

ب ـ مشتق هریك ازاین دوتابع مرکب را تعیین وحاصل هریك را به ازای $x=\frac{\pi}{12}$ رادیان تعیین کنید.

تابع ضمنی

۱-۲۷- تعریف : رابطهٔ $f(x,y)=0$ را درنظر می گیریم . دربرخی از موارد نمی‌توان ازاین تساوی y را صریحاً برحسب x بیان نمود ولی امکان دارد یك یا چند تابع به صورت $y=g(x)$ موجودباشند به قسمی‌که‌تساوی $f(x,g(x))=0$ به ازای تمام xهای‌واقع دردامنهٔ g برقرار باشد . در این صورت می‌گویند که تابع g بطور ضمنی بوسیلهٔ رابطه $f(x,y)=0$ تعریف شده ویا بطورخلاصه y تابعی ضمنی‌ازx است‌که ضمن‌رابطهٔ $f(x,y)=0$ بیان شده‌است.

مثال — روابط زیر را درنظر می گیریم:

$$2y-3x+2=0$$
$$xy-2y+x-3=0$$
$$y^3-x^3+3x-2=0$$
$$x^2+y^2+2x-3=0$$

سه رابطهٔ اول هرکدام یك تابع ضمنی از x ولی رابطهٔ چهارم دوتابع ضمنی از x (هر تابع یك نیم‌دایره) راتعریف می کنند

۱-۲۸- مشتق تابع ضمنی — برای‌محاسبهٔ‌مشتق‌تابعهای‌ضمنی‌ای‌که به‌صورت $f(x,y)=0$ تعریف شده‌اند ضرورتی به‌حل معادله وتعیین تابع $y=F(x)$ نیست. زیراعلاوه‌برآنکه راه‌محاسبه طولانی‌تراست، دربعضی مواردامکان پیداکردن y نیز نیست. بنابراین‌برای تعیین y' مشتق تابع به یکی‌ازدو روش زیر عمل می‌کنیم :

روش‌اول— دراین روش از طرفین معادلهٔ $f(x,y)=0$ جمله‌به جمله بارعایت دستورهای مشتق وقواعد مشتق گیری توابع مرکب که قبلاً دیده‌اید مشتق می‌گیریم واز معادلهٔ حاصل y' را تعیین می کنیم.

مثال ۱— مشتق تابع ضمنی تعریف شده بوسیله رابطهٔ $2y-3x+2=0$ را تعیین‌کنید.

حل:

$$2y'-3=0 \quad \text{وازآنجا} \quad y'=\frac{3}{2}$$

مثال ۲ — مشتق تابعی را که بوسیله رابطهٔ $xy-2y+x-3=0$ داده شده است تعیین کنید :

حل :

$$y+y'x-2y'+1=0$$
$$y'(x-2)+y+1=0 \implies y'=-\frac{y+1}{2-x}$$

روش دوم ـ فرض کنید $f'_x(x,y)$ و $f'_y(x,y)$ به‌ترتیب مشتقهای عبارت $f(x,y)$ نسبت به x (با فرض آنکه y مقداری ثابت است) ونسبت به y (با فرض آنکه x مقداری ثابت باشد) باشند. ثابت می کنند که مشتق (نسبت به x) تابع ضمنی y که توسط رابطهٔ $f(x,y)=0$ مشخص شده است به صورت

$$(1)\quad y'_x=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} \quad \text{و} \quad f'_y(x,y)\neq 0$$

همینطور اگر x تابعی ضمنی از y باشد که ضمن رابطهٔ $f(x,y)=0$ تعریف شده باشد مشتق x نسبت به y را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد

$$(2)\quad x'_y=-\frac{f'_y(x,y)}{f'_x(x,y)} \quad \text{و} \quad f'_x(x,y)\neq 0$$

اگر هردوی $f'_x(x,y)$ و $f'_y(x,y)$ مخالف صفر باشند آنوقت از روابط (۱) و (۲) دیده میشود که:

$$y'_x \cdot x'_y = 1$$

مثال ۳ ـ مشتق تابع ضمنی y را که بوسیله رابطهٔ $y^3-x^3+3x-2=0$ تعریف شده‌است تعیین کنید (x مطابق معمول متغیر مستقل است)

حل با روش اول ـ جمله به جمله مشتق می گیریم، با توجه به اینکه y تابع x است:

$$3y^2y'-3x^2+3=0$$

واز آنجا :

$$y'=\frac{x^2-1}{y^2}$$

روش دوم: یکدفعه x رامتغیر و y را ثابت ودفعهٔ دیگر y را متغیر و x راثابت می گیریم:

$$f'_x=-3x^2+3x$$

$$f'_y=3y^2$$

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{-3x^2+3x}{3y^2} \Longrightarrow y'=\frac{x^2-1}{y^2}$$

مثال ۴ ـ مشتق تابع ضمنی y راکه بوسیلهٔ دستور زیر داده شده‌است تعیین کنید:

$$x^2-xy+2x-2y-8=0$$

روش اول: جمله به جمله مشتق می گیریم :

$$2x-(y+y'x)+2-2y'=0$$

$$-y'(x+2)=-2x+y-2 \Longrightarrow y'=\frac{2x-y+2}{x+2}$$

روش دوم: y را ثابت و x را متغیر می‌گیریم: $f'_x = 2x - y + 2$

xرا ثابت و y را متغیر می‌گیریم: $f'_y = -x - 2$

$$y' = -\frac{2x - y + 2}{-x - 2} \Rightarrow y' = \frac{2x - y + 2}{x + 2}$$

مثال ۵ــ y تابع ضمنی از x است که به صورت $x^2y - 2y - 3x + 5 = 0$ داده شده است. ازنقطهٔ A به طول ۱ واقع برمنحنی نمایش آن مماسی برمنحنی رسم شده است. معادلهٔخط مماس را بنویسید:

حل ــ چون طول A برابر ۱ است درمعادله قرارمی‌دهیم تا عرض آن ۲ بدست آیـد چـون ضریب زاویه‌ای مماس برابر مشتق به ازا مختصات آن نقطه است، مشتق را از یکـی از دو راه به دلخواه تعیین می‌کنیم:

$$2xy + y'x^2 - 2y' - 3 = 0$$

$$y'(x^2 - 2) = -2xy + 3 \quad \text{یا} \quad y' = \frac{-2xy + 3}{x^2 - 2}$$

در مشتق به‌جایx مقدار ۱ و به جایy عدد ۲ قرار می‌دهیم:

ضریب زاویه‌ای مماس $m = \frac{-2 \times 2 + 3}{1 - 2} = 1$

معادله مماس:

$$y - 2 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x + 1$$

تمرین

مشتق اول y' و مشتق دوم y'' هریك از تابعهای ضمنی زیررا تعیین کنید (به یکی از دوراه به دلخواه)

(۱) $x^2 + y^2 = R^2$

(۲) $x^2 - y^2 = a^2$

(۳) $x^3y = a^3$

(۴) $xy - y^2 - 6 = 0$

(۵) $x^2 + y^2 + xy = 2$

(۶) $y^2 + 2y - x^2 = 0$

(۷) $x^2 - y^2 = 1$

(۸) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$

y'_x را برای هریك از تابعهای ضمنی زیر درنقاط داده شده تعیین کنید

(۹) $x^2+2y^2-xy-5=0$ (−۱و۱)

(۱۰) $x+x^2y^2+y-3=0$ (۱و−۲)

(۱۱) $x^2-y^2=16$ (۵و−۳)

۱۲ــ در نقطه‌ای به‌عرض ۱ از منحنی نمایش $y^2-x^2=9$ خطی بـر منحنی مماس‌شده است. معادلهٔ خط مماس را بنویسید.

۱۳ــ درنقطهٔ A (−۱و−۱) از منحنی نمایش $y^2x^2+x-y-1=0$ خطی قائم برمنحنی رسم شده است. معادلهٔ این‌خط قائم را بنویسید.

۱۴ــ تابع ضمنی y به صورت زیرداده شده‌است. تحقیق کنید خط مماس برمنحنی‌نمایش این تابع درنقطهٔ برخورد آن بامحورyها به صورت $y=x-1$ می‌باشد.

$$y\cos x+x\sin x+2y-3\sin x+3=0$$

۱۵ــ تابع ضمنی $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ مفروض است از نقطهٔ A واقع برمنحنی با طول وعرض برابر واقع در ربع اول خطی برمنحنی مماس شده است. معادلهٔ خط مماس رابنویسید. (a مقدار معلومی است)

۱ــ۲۹ــ تابع معکوس ــ فرض‌کنیدکه f تابعی یك به یك با دامنهٔ D_f و برد R_f باشد در اینصورت f زیر مجموعه‌ایست از $D_f\times R_f$ به‌طوری‌که اولا به‌ازای هر $x\in D_f$ یك وتنها یك $y\in R_f$ موجود است به‌قسمی که $(x,y)\in f$ وثانیاً به ازای هر $y\in R_f$ یك و تنها یك $x\in D_f$ موجود است به‌قسمی‌که $(x,y)\in f$. حال اگر

$$g=\{(y,x)\mid (x,y)\in f\}\subseteq R_f\times D_f$$

آنگاه بنا به قسمت ثانیاً فوق g یك تابع است و دامنهٔ تعریف g برد f وبرد g دامنهٔ تعریف f است یعنی :

$$D_g=R_f \text{ و } R_g=D_f$$

تابع gراتابع معکوس f می‌خوانند و معمولا آن رابا f^{-1} نشان میدهند.

بنابراین داریم :

$$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

توجه کنیدکه اگر g معکوس f باشد ، آنگاه f نیز معکوس g خواهد بود . پس :

$$(f^{-1})^{-1}=f$$

فرض کنیدکه I_S تابع همانی روی مجموعهٔ S باشد یعنی

$$I_S(x)=x \quad \forall x\in S$$

به آسانی می‌توان دیدکه $f\circ f^{-1}=I_{D_f}$ و $f\circ f^{-1}=I_{R_f}$

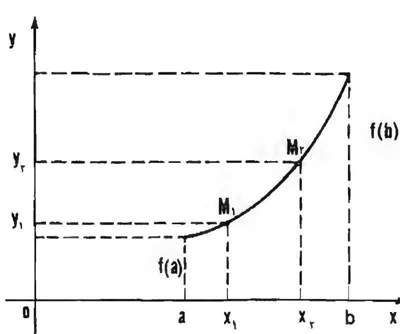
در حقیقت اگر $y=f(x)$ آنگاه $x=f^{-1}(y)$ و از آنجا

$$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y=I_{R_f}(y) \qquad \forall y\in R_f$$

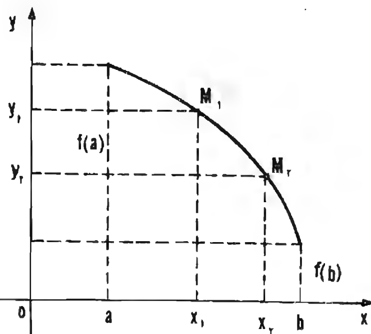
و

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x=I_{D_f}(x) \quad \forall x\in D_f$$

مثال ۱ — هرگاه تابع $y=f(x)$ درفاصلهٔ $[a,b]$ معین‌وپیوسته ویکنوایعنی درفاصلهٔ مذکور فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، آنگاه f یك به یك بوده و به ازای هر مقدار از x در فاصلهٔ $[a,b]$ مانند $x_\circ$ یك مقدار $y_\circ$ برای y درفاصلهٔ $[f(a),f(b)]$ یا $[f(b),f(a)]$ (برحسب آنکه f صعودی باشد یا نزولی) بدست می‌آید، و همچنین به ازای هر مقدار $y_\circ$ در فاصلهٔ $[f(a),f(b)]$ یا $[f(b),f(a)]$ (برحسب آنکه f صعودی باشد یانزولی) یك مقدار وفقط یك مقدار برای x مانند $x_\circ$ درفاصلهٔ $[a,b]$ بدست می‌آید. به عبارت دیگر f دارای معکوس با دامنهٔ $[f(a),f(b)]$ یا $[f(b),f(a)]$ (برحسب آنکه f صعودی باشد یا نزولی) و برد $[a,b]$ است. این یکی از حالاتی است که زیاد باآن سروکارخواهیم داشت. شکلهای زیر بحث فوق را مجسم می‌کنند.



تابع صعودی

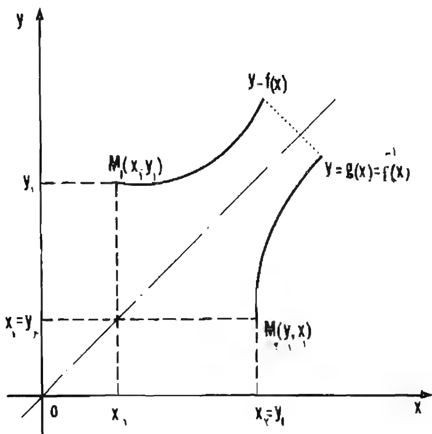


تابع نزولی

مثال ۲ — تابع $y=۲x-۴$ (۱) مفروض است. می‌دانیم تابع به ازای جمیع مقادیر x از $-\infty$ تا $+\infty$ معین و پیوسته وصعودی است. بنابراین به ازای هرمقدار $y_\circ$ از y می‌توان

یك مقدار x_0 و فقط یك مقدار برای x پیدا کرد به قسمی‌که $y_0 = 2x_0 - 2$. بنابراین $x_0 = \frac{1}{2}y_0 + 2$. تابع $x = \frac{1}{2}y + 2$ را کــه درآن y متغیر مستقل و x متغیر تابع‌ می‌باشد، معکوس تابع (۱) می‌گویند. هرگاه مطابق معمول متغیر مستقل را به x و متغیر تابع را به y نشان دهیم معکوس تابع (۱) چنین خواهد بود: $y = \frac{1}{2}x + 2$ تابعی است از y و خواهیم داشت

تبصره ـ همانطورکه در بالا گفته شد. هرگاه جفت مرتب (x_1 و y_1) متعلق به f باشد (یعنی نقطه به مختصات (x_1وy_1) به‌نمودار f متعلق باشد) آنگاه جفت مرتب (y_1وx_1) به تابع f^{-1} متعلق‌است (یعنی نقطه به مختصات (y_1 و x_1) برنمودار f^{-1} واقع‌است) بنابراین هرگاه منحنی نمایش دوتابع راکه معکوس یکدیگرند دریك دستگاه مختصات عمود برهم رسم‌کنیم نسبت به‌نیمساز ربع اول وسوم محورها قرینه‌اند.



۱ ـ۳۰ـ **نکات قابل توجه** ـ برای تعیین معکوس یك تـابع به نکته‌هـای ذیل تـوجه داشته باشید.

الف: معکوس‌تابعی‌که یك به‌یك نباشدتعریف نشده است.

ب: برای پیدا کردن‌دستور f^{-1} (معکوس تابع f) در دستور $y = f(x)$ مقدار x را برحسب y تعیین‌کنید تا $x = g(y)$ بدست آید، و چون در تابع اخیر y متغیر مستقل و x متغیر تابع است ومطابق معمول متغیر مستقل را به x و متغیر تابع را y نمایش می‌دهیم جای x و y را

عوض می‌کنیم بنابراین تابع معکوس را به صورت $y=g(x)$ می‌نویسیم ، پس

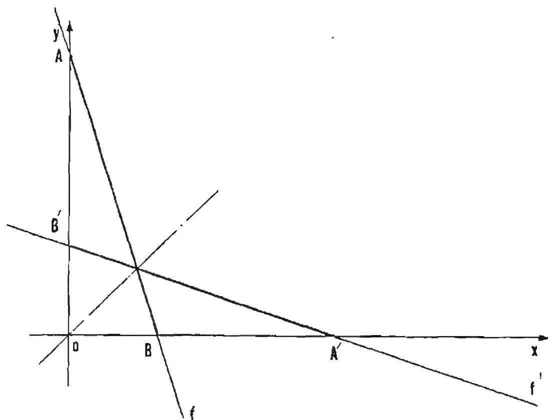
$$f^{-1}(x)=g(x)$$

ج : در دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ که معکوس یکدیگرند دامنهٔ تعریف یکی برد دیگری است و بالعکس .

مثال ۱ — تابع $y=f(x)=-3x+6$ مفروض است . تابع f^{-1} را تعیین و نمودار هردو را در یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید .

حل : چون تابع f با دستور $y=-3x+6$ به ازای جمیع مقادیر x نزولی است پس یك به‌یك بوده ومعکوس دارد. داریم : $x=-\frac{y}{3}+2$ (y متغیر مستقل و x متغیر تابع است).

پس می‌نویسیم: $y=f^{-1}(x)=-\frac{x}{3}+2$ که تابع معکوس f است .



نمودارهای دو تابع مطابق با شکل است که روی آنها دونقطهٔ $B(2,0)$ و $A(0,6)$ از تابع اول و متناظر آنها دو نقطهٔ $B'(0,2)$ و $A'(6,0)$ از تابع دوم نموده شده است.

مثال ۲ — تابع $y=f(x)=2x-2$ مفروض است . هرگاه x در فاصله $[0,3]$ تغییر کند :

الف : تابع معکوس تابع f را تعیین و دامنهٔ تعریف و برد آنرا بدست آورید .

ب : نمودار دو تابع را در یك دستگاه مختصات رسم کنید:

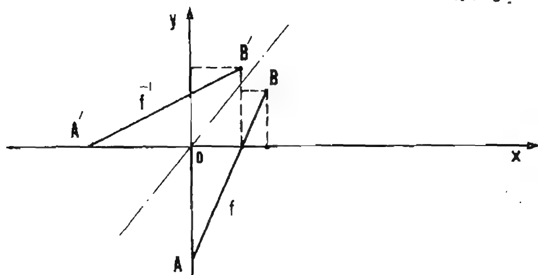
حل : f تابعی است صعودی و پیوسته و چون $D_f=[0,3]$ پس داریم :

$$R_f=[f(0),f(3)]=[-4,2]$$

با اندکی محاسبه معلوم میشود که $y=f^{-1}(x)=\frac{x}{2}+2$ معکوس تابع f است و داریم :

$$D_{f^{-1}}=R_f=[-4,2],\quad R_{f^{-1}}=D_f=[0,3]$$

در نمودارزیردونقطهٔ $B(3,2)$ و $A(0,-4)$ ازخطاول‌ودونقطهٔ متناظرآنها $B'(2,3)$ و $A'(-4,0)$ ازخط دوم اختیار شده‌اند.

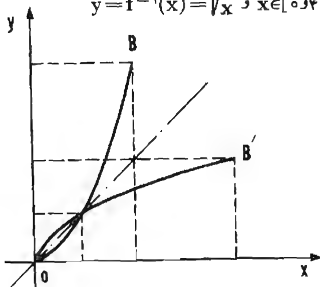


مثال ۳ ــ تابع f به‌صورت $y=x^2$ برای x در فاصلهٔ $[0,2]$ تعریف شده است. تابع f^{-1} را تعیین ونمودار دوتابع را دریك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

حل : مشتق تابع مفروض $y'=2x$ به‌ازای $x>0$ مثبت است پس تابع درفاصلهٔ مذکور صعودی است بنابراین معکوس دارد و از آنجائیکه تابع در این فاصله پیوسته نیز می‌باشد پس برد آن فاصلهٔ $[0,4]$ ودامنه و برد تابع معکوس آن به ترتیب $[0,4]$ و $[0,2]$ می‌باشد. برای بدست آوردن تابع معکوس ، x را برحسب y حل می‌کنیم خواهیم داشت :

$$x=\sqrt{y} \quad و \quad y\in[0,4]$$

ویا باتعویض x و y داریم: $x\in[0,4]$ و $y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}$



$O(0,0)$ و $A(1,1)$ و $B(2,4)$ سه نقطه از نمودار f

$O(0,0)$ و $A(1,1)$ و $B'(4,2)$ سه نقطه از نمودار f^{-1}

۱ــ۳۱ــ مشتق تابع معکوس ــ فرض کنید که تابع f درفاصلهٔ باز $]a,b[$ دارای مشتق مثبت باشد. بنا به آنچه که در کتاب حساب و جبر سال سوم دیدیم f در فاصله $]a,b[$ صعودی است و در نتیجه یك به یك می‌باشد. از این روی f در این فاصلهٔ دارای معکوس است. فرض کنید g تابع معکوس f باشد ثابت می‌کنند که g نیز درفاصله $]f(a),f(b)[$ مشتق پذیر است. با قبول این مطلب می‌خواهیم مشتق g را در نقطه‌ای مانند $y\in]f(a),f(b)[$ بدست آوریم. دیده‌ایم که:

$$(1)\qquad f(g(y))=y \qquad \forall y\in]f(a),f(b)[$$

اگر از طرفین رابطه (۱) نسبت به y مشتق بگیریم و دستور مشتق تابع تابع‌را بکار بریم خواهیم داشت:

$$f'(g(y))\cdot g'(y)=1 \qquad \forall y\in]f(a),f(b)[$$

و یا بافرض $x=g(y)$ (یا $y=f(x)$) داریم:

$$(2)\qquad \boxed{g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}=\frac{1}{f'(x)}}$$

یا

$$(f^{-1})'=\frac{1}{f'}$$

اگر نماد $\frac{dy}{dx}$ را برای مشتق y نسبت به x (یعنی $f'(x)$) و نماد $\frac{dx}{dy}$ را برای مشتق x نسبت به y (یعنی $g'(y)$) به‌کار بریم رابطهٔ (۲) را می‌توان به صورت ساده زیر نوشت:

$$(3)\qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

رابطهٔ (۳) بیان می‌کند که مشتق تابع معکوس برابر معکوس مشتق تابع اول است

تبصره- در مطالب فوق فرض کرده بودیم که مشتق f مثبت باشد.

درحالتی که مشتق f در $]a,b[$ منفی باشد نیز نتیجهٔ فوق درست است و دستورهای (۲) و (۳) صادق‌اند. اگر f درفاصلهٔ $]a,b[$ یکنوا ومشتق پذیر باشد آنگاه طبق آنچه در کتاب حساب و جبر سال سوم دیده‌اید $f'(x)$ یا همواره غیر منفی و یا همواره غیرمثبت است. در این حالت نیز دستورهای (۲) و (۳) در هر نقطه که مشتق f مخالف صفر باشد صادق هستند. باز بودن فاصلهٔ $]a,b[$ هیچ نقشی در صحت مطالب فوق ندارد، به عبارت دیگر می‌توان فاصلهٔ مورد بحث را فاصلهٔ بسته یا نیم بسته و یا بی پایان اختیار کرد.

مثال ۱ــ تابع $f(x)=x^{2}+1$ باشرط $x \geqslant 0$ مفروض است. تابع معکوس f را نوشته و صحت تساوی $(f^{-1})'=\frac{1}{f'}$ را درنقاطی که $f'(x)\neq 0$ تحقیق کنید.

حل ــ دستورتابع f^{-1} ازروی دستور f چنین‌است $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$ دامنهٔ تعریف و برد f یعنی فاصله های $[0,\infty]$ و $[1,\infty]$ به ترتیب برد و دامنهٔ تعریف f^{-1} خواهند بود ازهر دوتابع مشتق میگیریم.

$$f(x)=x^{2}+1 \Longrightarrow f'_{x}=2x$$

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x-1} \Longrightarrow \left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow$$

$$(f^{-1}(y))'=\frac{1}{2\sqrt{y-1}}=\frac{1}{2\sqrt{(x^{2}+1)-1}}=\frac{1}{2|x|}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{f'(x)} \text{ و } x>0$$

یعنی :

$$(f^{-1})'=\frac{1}{f'} \text{ یا } f'.(f^{-1})'=1 \text{ و } x>0$$

مثال ۲ ــ تابع $y=x^{3}$ مفروض است .

الف: ازنقطهٔ B به‌طول۲ واقع برمنحنی (C) نمایش تابع فوق خطی برمنحنی مماس شده است. معادلهٔ خط مماس را بنویسید.

ب : ازنقطهٔ B' متناظر نقطهٔ B روی منحنی (C') نمایش تابع معکوس تابع فوق خطی برمنحنی (C') مماس شده است. معادلهٔ مماس رابنویسید.

ج: معادلهٔ تابع معکوس تابع فوق راتعیین ونمودار دومنحنی را در فاصلهٔ [۲و۰] (دامنهٔ تابع اول) رسم کنید:

حل‌الف: داریم $B(2 \text{ و } 8)$ چون $y'=3x^{2}$ پس ضریب زاویه‌ای مماس برمنحنی (C) درB خواهد بود.

$$m_{\text{مماس}}=y'_{B}=12$$

پس معادلهٔ مماس درB خواهدبود:

$$y-8=12(x-2) \text{ یا } y=12x-16$$

ب: داریم $B'(8 \text{ و } 2)$ وهمچنین $y'_{B'}=\frac{1}{y'_{B}}$ یا $m=\frac{1}{12}$ مماس‌در B'

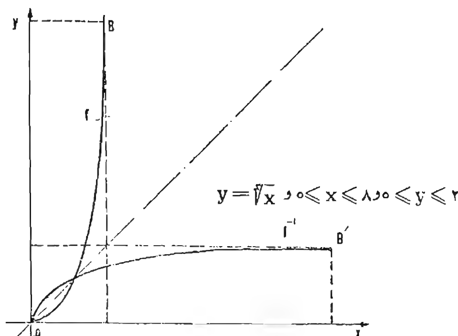
پس معادلهٔ مماس در B' برمنحنی تابع معکوس که قرینهٔ مماس اولی نسبت به نیمساز ربع اول می‌باشد چنین است:

$$y-2=\frac{1}{12}(x-8) \text{ یا } y=\frac{1}{12}x+\frac{4}{3}$$

ج: $y'=3x^2$ بنابراین $y'\geqslant 0$ یعنی تابع فوق به ازای جمیع مقادیر x صعودی است بنابراین معکوس دارد و معادله تابع معکوس خواهد بود: $x=\sqrt[3]{y}$ (y متغیر مستقل و x متغیر تابع) پس: $y=\sqrt[3]{x}$

در شکل زیر منحنی هردو تابع را دریک‌دستگاه مختصات رسم کرده‌ایم.

$y=x^2$, $0<x<2$ و $0<y<8$



سه نقطه از منحنی f: $O(0,0)$ و $A(1,1)$ و $B(2,8)$

سه نقطه ازمنحنی f^{-1}: $O(0,0)$ و $A(1,1)$ و $B'(8,2)$

دومنحنی نسبت به‌نیمساز ربع‌اول قرینه‌اند

مثال ۳ ـــ تابع f به صورت زیر داده شده است:

$$y=f(x)=\operatorname{Arcsin}x ،\ -1\leqslant x\leqslant 1 \text{ و } \frac{-\pi}{2}\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}$$

الف ـ مشتق تابع فوق را به‌کمك مشتق تابع معکوس وهمچنین به وسیلهٔ مشتق تابع ضمنی تعیین کنید.

ب ـ معادلهٔ تابع معکوس را بنویسید و دومنحنی را دریك دستگاه مختصات رسم کنید.

حل ـ الف:

تابع داده شده درفاصلهٔ $[-1,1]$ پیوسته وصعودی است پس معکوس دارد و تابع‌معکوس آن $x=\sin y$ است که درآن y متغیر مستقل و x متغیر تابع است یعنی:

$$x=\sin y ،\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2} \text{ و } -1<x<1$$

می‌دانیم $y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{\cos y}$. با فرض $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ ،چون $\cos y$ مثبت‌است بنابراین:

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

و در نتیجه : یعنی: $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{cases} y=\operatorname{Arc}\sin x \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{و} \quad x\neq\pm 1 \end{cases}$$

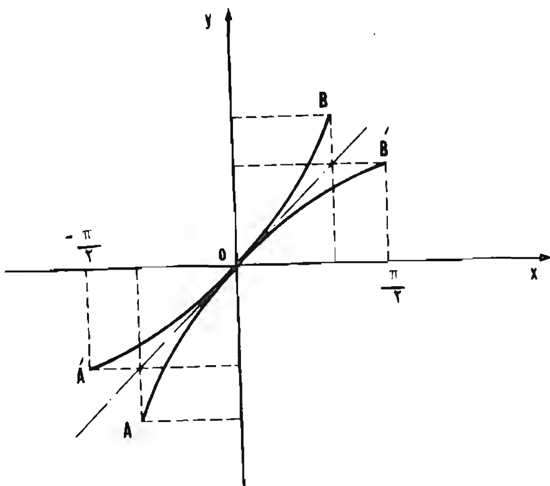
به کمك مشتق تابع ضمنی نیز می‌توان y' را بدست‌آورد:

$$y=\operatorname{Arc}\sin x \implies \sin y=x$$

از دوطرف باتوجه به‌اینکه y تابع و x متغیر است مشتق می‌گیریم:

$$y'\cos y=1 \implies y'=\frac{1}{\cos y} \quad \text{و} \quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{و} \quad x\neq\pm 1$$



دستور f:

$$y = \mathrm{Arc\sin} x \text{ ، } -1 \leq x \leq 1 \text{ و } \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

دستور f^{-1}:

$$y = \sin x \text{ ، } \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ و } -1 \leq y \leq 1$$

سه نقطه از تابع اول :

$$A(-1 \text{ و } \frac{-\pi}{2}) \text{ و } O(0 \text{ و } 0) \text{ و } B(1 \text{ و } \frac{\pi}{2})$$

نقطه‌های متناظر از تابع دوم:

$$A'(-\frac{\pi}{2} \text{ و } -1) \text{ و } O(0 \text{ و } 0) \text{ و } B'(\frac{\pi}{2} \text{ و } 1)$$

منحنی AOB نمودار $y = \mathrm{Arc\sin} x$

منحنی A´OB´ نمودار $y = \sin x$

دومنحنی نسبت به‌نیمساز ربع اول وسوم قرینه و درمبدأ مختصات برهم مماس و مماس مشترکشان نیمساز ربع اول‌و سوم است.

مثال۴- مشتق تابع $y = \mathrm{Arc\cos} x$ را به‌کمك تابع معکوس وهمچنین تابع ضمنی تعیین ومنحنی نمایش دوتابع رادر یکدستگاه مختصات رسم‌کنید.

حل: تابع داده شده درفاصلهٔ [۱و۱ −] پیوسته وهمواره نزولی است:

$$y = \mathrm{Arc\cos} x \text{ ، } -1 \leq x \leq 1 \text{ و } 0 \leq y \leq \pi$$

پس تابع معکوس دارد:

$$x = \cos y \text{ ، } 0 \leq y \leq \pi \text{ و } -1 \leq x \leq 1$$

می‌دانیم $y' = \frac{1}{x'}$ و چون $x' = -\sin y$ و $0 < y < \pi$ است پس $\sin y > 0$ و داریم:

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

بنابراین:

$$y = \mathrm{Arc\cos} x$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad -1 < x < 1$$

راه دیگر برای محاسبهٔ مشتق: می‌دانیم

$$\frac{\pi}{2} = \mathrm{Arc\sin} x + \mathrm{Arc\cos} x$$

اگر از دو طرف مشتق بگیریم :

$$\circ = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} + (Arccos x)'$$

یا

$$y' = \frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}} \qquad -۱<x<۱$$

تعیین مشتق با استفاده از تابع ضمنی: می‌دانیم $x = \cos y$ که y تابع و x متغیر مستقل است از دوطرف مشتق می‌گیریم:

$-y' \sin y = ۱$ و چون $\sin y = \sqrt{۱ - \cos^۲ y}$ یا $\sin y = \sqrt{۱ - x^۲}$

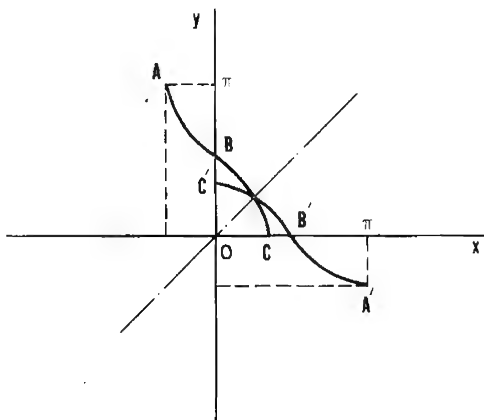
پس :

$$y' = \frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}} \qquad -۱<x<۱$$

رسم دو منحنی دریک‌دستگاه :

دستور f: $[\circ, \pi] \ni y$ و $[-۱, ۱] \ni x$ ، $y = Arccos x$

دستور $f^{-۱}$: $[-۱, ۱] \ni y$ و $[\circ, \pi] \ni x$ ، $y = \cos x$



سه نقطه از نمودار f: $C(۱, \circ)$ و $B(\circ, \frac{\pi}{۲})$ و $A(-۱, \pi)$

سه نقطهٔ متناظر از نمودار $f^{-۱}$: $C'(\circ, ۱)$ و $B'(\frac{\pi}{۲}, \circ)$ و $A'(\pi, -۱)$

نمودارهای دو تابع ، یعنی منحنیهای ABC و $A'B'C'$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند. مماسهای بر نمودار f درنقاط A و C برمحور $x'x$ عمودند و مماسهای برنمودار f^{-1} در نقاط A' و C' با محور $x'x$ موازیند.

مثال ۵ — تابع f به صورت زیرداده شده است:

$$y = Arctg x \quad \text{و} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

مشتق تابع را با استفاده از تابع معکوس آن تعیین کنید.

حل — وقتی x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند y از $\frac{-\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییرمی‌کند و تابع همواره معین وصعودی است پس معکوس‌دارد و معکوس‌آن $x = tg y$ است که در آن y متغیرمستقل‌و x متغیر تابع است بنابراین $y' = \frac{1}{x'}$ اما: $x' = 1 + tg^2 y = 1 + x^2 \Longrightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\begin{cases} y = Arctg x \quad \text{یا} \quad y = tg^{-1} x \\ y' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

مثال ۶ — تابع f به صورت زیر داده شده است:

$$y = Arccotg x \ ، \ 0 < y < \pi$$

مشتق‌آنرا با استفاده از تابع معکوس‌آن بدست‌آورید.

حل: وقتی‌که x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند y از π تاصفر نزول می‌کند و تابع همواره معین و پیوسته و نزولی‌است پس معکوس دارد و تابع معکوس آن $x = cotg y$ است (y متغیرمستقل).

می‌دانیم $y' = \frac{1}{x'}$ اما:

$$x' = -(1 + cotg^2 y) = -(1 + x^2)$$

بنابراین :

$$\begin{cases} y = Arccotg x \\ y' = \dfrac{-1}{1+x^2} \end{cases}$$

راه دیگر : $Arctg x + Arccotg x = \frac{\pi}{2}$ بنابراین:

$$\frac{1}{1+x^2} + [Arcotg x]' = 0 \implies y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

تمرین

تابع‌های معکوس تابع‌های با ضابطهٔ داده شده در زیر را تعیین کنید.

۱) $y=3x+5$ ۲) $y=-5x+1$

۳) $y=\frac{2x+1}{x-4}$ ۴) $y=\frac{1}{x}$

۵) $y=|x+1|$ و $x\leqslant -1$ ۶) $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ و $ab'-ba'\neq 0$

۷) $y=3x+|x|$ $x>0$ ۸) $y=|x|-2$ و $x<-1$

۹) $x^2+y^2=4$ ، $x>0$ و $y>0$ ۱۰) $y=x^2-2x$ ، $x>+1$

۱۱) دامنه تعریف وبرد تابع $4x^2+y^2=16$ ، $y<0$ و $x<0$ را بدست آورده و تابع معکوس آنرا تعیین کنید.

تابعهای زیر داده شده‌اند. مشتق آنها را تعیین کنید.

۱۲) $y=Arcsin 2x$ ۱۳) $y=Arccos 3x$

۱۴) $y=Arctg 2x$ ۱۵) $y=Arcotg 2x$

۱۶) $y=Arcsin ax$ ۱۷) $y=Arcsin ax+Arccos ax$

۱۸) $y=Arctg mx+Arctg nx$ ۱۹) $y=(Arcsin x)^3$

۲۰ــ مشتق تابع با ضابطهٔ $y=(Arctg x)^2$ را به ازای $x=1$ تعیین کنید.

۲۱ــ معادلهٔ مماس بـر منحنی نمایش تابع $y=Arctg 3x$ را در نقطه‌ای از منحنی به طول $\frac{1}{3}$ بنویسید.

۲۲ــ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x^3+1}$ داده شده است؛

الف ــ مطلوبست تعیین دامنهٔ تعریف و برد آن

ب ــ تابع معکوس و مشتق آنرا تعیین کنید

ج ــ معادلهٔ خط مماس برمنحنی فوق را در نقطهٔ A به طول ۲ و همچنین معادلهٔ خط قائم برمنحنی نمایش تابع معکـوس را در نقطهٔ A' متناظـر A تعیین کنید. آیا دوخط نسبت بهم چه وضعی دارند.

۲۳ــ تابع با ضابطهٔ $y=x+\frac{1}{x}$ مفروض است. درهریك از حالات $x>1$ و $x<-1$ تابع معکوس ومشتق آنرا تعیین کنید.

۲۴ـ تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x+2}{2x-3}$ داده شده‌است. نمودار این تابع و نمودار معکوس آنرا در یك دستگاه مختصات رسم کنید.

۲۵ـ تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x+1}{x-1}$ مفروض است. نمودار این تابع و معکوس آنرا در یك‌دستگاه مختصات رسم کنید.

۲۶ـ تابع با ضابطهٔ $y=\frac{1}{x^2}$ که در آن $x>0$ داده شده است. نمودار این تابع و معکوس آنرا رسم کنید.

۱ـ۳۲ـ کاربرد مشتق در مسائل عملی ماکزیمم و می‌نیمم ــ در بررسی مشتق و اکسترمم (ماکزیمم و می‌نیموم)، که قبلا دیده‌اید گفته شده است که مشتق در موضوع سرعت در مکانیك وفیزیك و مسائل مختلف درهندسه و اقتصاد و آمار وسایر دانش‌ها کاربرد فراوان دارد.

علاوه بر ماکزیمم و می‌نیموم نسبی ماکزیمم و می‌نیموم مطلق نیز مورد بحث واقع می‌شود. همانطورکه :درسال سوم دیده‌اید برای تعیین ماکزیمم و می‌نیمم نسبی یك تابع مشتق پذیر بایدمشتق تابع را نسبت به متغیر مستقل حساب کرده و نقاط تغییر علامت آنرا تعیین‌کنیم. در مورد ماکزیمم و می‌نیموم مطلق باید حداکثر و حداقل تابع مطلوب را در فاصلهٔ تغییرات متغیر مشخص‌کنیم. گاهی ممکن است ماکزیمم و می‌نیموم نسبی ماکزیمم و می‌نیموم مطلق نیز باشد در زیـرچند مثال برای نشان دادن‌موضوع می‌آوریم.

مسئلهٔ اولـ مجموع دو عدد مثبت مقدار ثابت $2a$ است.حاصل ضرب آنها درچه صورت ماکزیمم است.

حل: اگر یکی از دوعدد x فرض شود دیگری $2a-x$ خواهد بود. اگر حاصل ضرب آنها را P بنامیم خواهیم داشت:

$$P=x(2a-x)=-x^2+2ax \quad \text{و} \quad 0<x<2a$$

مشتق تابع $P'=-2x+2a$ به ازای $x=a$ صفر شده و تغییر علامت می‌دهد یعنی به‌ازای $x<a$ داریم $P'>0$ و به‌ازای $x>a$ داریم $P'<0$. بنابراین تابع فوق به ازای $x=a$ دارای ماکزیمم $P=a^2$ خواهد بود. یعنی در صورتی حاصل‌ضرب P ماکزیمم است که دو عدد برابر باشند.

مسئلهٔ دوم ــ حاصل ضرب دو عدد مثبت مقدار ثابت k^2 است $(k>0)$. درچه صورت مجموع آن دوعدد می‌نیموم است.

حلـ اگر یکی‌از دوعدد x باشد دیگری $\frac{k^2}{x}$ است و اگر مجموع‌آن دو عدد را S بنامیم

داریم : $S=x+\frac{k^2}{x}$ ، که در آن $0<x<k^2$. حال اگر مشتق S راحساب کنیم خواهیم داشت :

$$S'=1-\frac{k^2}{x^2}=\frac{x^2-k^2}{x^2}$$

چنانکه دیده می‌شود به‌ازاء $x=k>0$ تابع دارای می‌نیموم $S=2k$ خواهد بود و در این حال دوعدد برابر می‌باشند.

مسئله سوم - مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a مفروض است و AH ارتفاع آن است . مربع مستطیل MNPQ را به قسمی در مثلث محاط کرده‌ایم که MN روی BC قرار دارد . معلوم کنید درچه صورت مساحت مستطیل ماکزیمم است.

حل- $HM=HN$ را x فرض می‌کنیم.

بنابراین اضلاع مستطیل چنین خواهند بود:

$$MN=2HM=2x$$

و

$$MQ=MB\,tg60^\circ=\frac{(a-2x)\sqrt{3}}{2}$$

اگرمساحت مستطیل را S بنامیم داریم:

$$S=MQ\times MN$$

$$S=x(a-2x)\sqrt{3}\Longrightarrow$$

$$S=\sqrt{3}(-2x^2+ax)\quad و \quad 0<x<\frac{a}{2}$$

و $S'=\sqrt{3}(-4x+a)$ بـه ازاء $x=\frac{a}{4}$ صفرمی‌شود و به‌ازاء $x<\frac{a}{4}$ مثبت و به ازاء $x>\frac{a}{4}$ منفی است . پس تابـع دارای ماکزیمم $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ است.

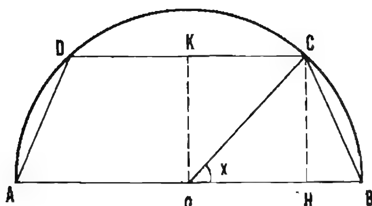
مسئلهٔ چهارم - نیمدایرهٔ به‌قطر $AB=2R$ داده شده است . وتر CD موازی قطـر AB رسـم شده است زاویـهٔ $COB=x$ را چنان تعیین‌کنیدکه مساحت ذوزنقهٔ ABCD ماکزیمم باشد.

حل:

$$S=\frac{AB+CD}{2}\times CH$$

$$AB=2R \quad و \quad CD=2CK=2R\cos x \quad و \quad CH=R\sin x$$

$$S=\frac{2R+2R\cos x}{2}\times R\sin x$$



$$S=R^2(1+\cos x)\cdot\sin x \qquad \text{و}\ 0<x<\frac{\pi}{2}$$
$$S'=R^2[-\sin^2 x+\cos^2 x+\cos x]=R^2(\cos 2x+\cos x)$$
$$S'=0 \Longrightarrow \cos 2x=-\cos x=\cos(\pi-x)$$

$$2x=2k\pi\pm(\pi-x) \implies x=(2k+1)\frac{\pi}{3} \ \text{یا}\ x=(2k+1)\pi$$

چون $0<x<\frac{\pi}{2}$ پس $x=\frac{\pi}{3}$ تنها جواب دراین فاصله است. اگر $0<x<\frac{\pi}{3}$، آنوقت مشتق مثبت است واگر $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$، آنوقت مشتق منفی‌است پس S در نقطهٔ $\frac{\pi}{3}$ دارای ماکزیمی برابر $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ می باشد.

تمرین

۱ـ نقطهٔ A به طول a روی محور Ox و نقطهٔ B به عرض b روی محور Oy و خط D به معادله $y=h$ (به فرض $h>a>b>0$) داده شده است. روی خط D نقطهٔ M را به قسمی تعیین کنید که:

الف: $MA+MB$ می‌نیموم باشد.

ب: $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2$ می‌نیموم باشد.

۲ـ مقوائی مربع شکل به ضلع a سانتیمتر در دست است. ازگوشه‌های این مقوا مربعهائی به ضلع x سانتیمتر جدا می‌کنیم وبا تاکردن مقوا جعبهٔ مکعب مستطیل شکل بدون دری میسازیم. x را چنان تعیین کنید که حجم جعبه ماکزیمم باشد.

۳ـ یك ورقهٔ مقوا به‌شکل مستطیل وبه مساحت ثابت a^2 را به چـه ابعادی انتخاب کنیم تابتوان باآن مکعب مستطیلی به‌ارتفاع ثابت h بسازیم که دارای حجم ماکزیمم باشد (ازهر گوشهٔ آن ورقه مربعی به ضلع h بریده وآنرا تاکرده‌ایم).

۴ـ ثابت کنید بین مستطیلهای محاط در دایره ، مربع محاطی،مساحتش از مساحت کلیهٔ مستطیلها بیشتر وهمچنین محیطش از محیط کلیهٔ مستطیلها بیشتر است.

۵ـ بین مثلثهای متساوی‌الساقین محاط در دایره ، محیط مثلث متساوی‌الاضلاع از محیط مثلثهای دیگر بیشتر است.

۶ـ تحقیق کنیدبین مثلثهای قائم‌الزاویهٔ به وتر a ، مثلثی دارای مساحت ماکزیمم است‌که اندازهٔ ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔآن $\frac{a}{\sqrt{۲}}$ باشد.

۷ـ تحقیق‌کنید بین استوانه‌های دوار که در داخل‌کرهٔ به شعاع R محاط است آنکه ارتفاعش $\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ است‌حجمش‌از دیگر استوانه‌ها‌بیشتراست.

۸ـ بین مخروطهای دوار محاط درکرهٔ به شعاع R کدامیك دارای بیشترین حجم است؟

۹ـ بین ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین به مساحت ثابت S که زاویهٔ ساق و قاعده α باشد کدامیك محیطش می‌نیموم است.

(جواب طول ساق $\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$)

۱۰ـ درون‌کرهٔ به شعاع R منشور مثلث القاعدهٔمنتظمی با حجم ماکزیمم محاط‌کنید.

(جواب ارتفاع منشور $\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$)

۱۱ـ مخروطی برنیمکرهٔ به‌شعاع R محیط‌کنید به‌قسمی‌که قاعدهٔ مخروط منطبق برصفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ نیمکره باشد و حجم مخروط می‌نیموم باشد.

(جواب ارتفاع $R\sqrt{۳}$)

۱۲ـ مخروط دواری بر استوانهٔ به شعاع قاعدهٔ R محیط‌کنید‌که قاعدهٔ مخروط برصفحهٔ قاعدهٔ استوانه منطبق و مرکز دایرهٔ قاعدهٔ آنها مشترك باشد . در چه صورت حجم مخروط می‌نیموم است .

(جواب $R_۱=\frac{۳R}{۲}$)

۱۳ـ ازنقطهٔ $A(a,b)$ واقع در ربع‌اول محورهای مختصات عمود برهم‌خطی‌چنان مرور دهید‌که اگر Ox را در C و Oy را در D قطع‌کند مساحت مثلث OCD می‌نیموم باشد.

(جواب معادلهٔ خط $\frac{x}{۲a}+\frac{y}{۲b}=۱$)

۱۴ـ ۱۲ پیل متشابه را که نیروی محرك هرکدام ۱/۵ ولت و مقاومت داخلی هریك $\frac{۱}{۱۰}$ اهم است به چه ترتیب باید بپیوندیم تا حداکثر شدت جریان از مقاومت خارجی

$R=\frac{1}{30}$ اهمی بگذرد .

راهنمائی – $I=\frac{p\cdot q\cdot E}{pR+qr}$ (I شدت‌جریان برحسب آمپر، E نیروی محرک هرپیل ، r مقاومت داخلی ، q تعداد ردیف‌ها و $pq=12$).

(جواب ۲ ردیف ۶ تائی)

خط مجانب

۱–۳۳– **شاخه بی‌نهایت منحنی** – گوئیم منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ دارای شاخهٔ بی نهایت است هرگاه نقطه یانقاطی روی منحنی وجود داشته باشد که لااقل یکی از مختصات آن (طول یاعرض یاهردو) به سمت بی‌نهایت میل کند.

مثال ۱ – منحنی نمایش $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ دارای شاخه بی نهایت است زیرا:

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{\sqrt{x}}{x+1}=0$$

مثال۲– منحنی نمایش $y=1+\frac{1}{(x-2)^2}$ دارای شاخه‌های بی‌نهایت‌است زیرا داریم :

$$\begin{cases}x\to 2\\ y\to+\infty\end{cases} \text{ و } \begin{cases}x\to+\infty\\ y\to 1\end{cases} \text{ و } \begin{cases}x\to-\infty\\ y\to 1\end{cases}$$

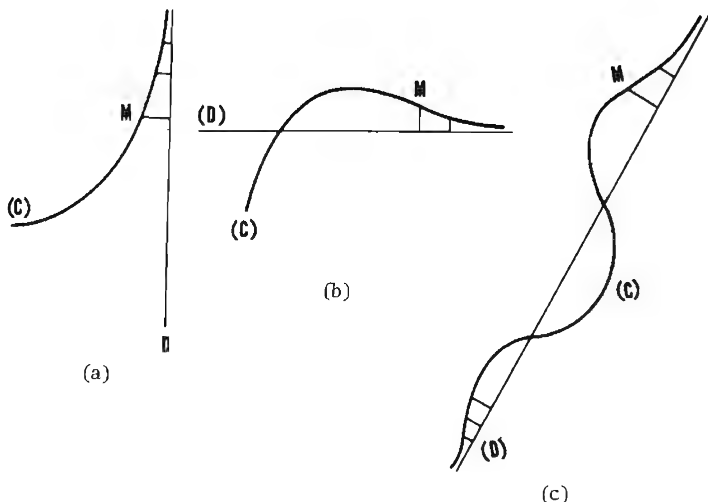
مثال ۳ – منحنی نمایش $y=x+\frac{1}{x^2+1}$ دارای شاخه‌های بی‌نهایت است زیرا:

$$\begin{cases}x\to-\infty\\ y\to-\infty\end{cases} \text{ و } \begin{cases}x\to+\infty\\ y\to+\infty\end{cases}$$

۱–۳۴– **تعریف خط مجانب** : هرگـاه منحنی (C) نمایش تابع $y=f(x)$ داری شاخهٔ بی‌نهایت باشد خط(D) را مجانب‌آن شاخه گوئیم درصورتی‌که فاصلهٔ نقطهٔ متغیر M ازآن‌شاخه تا آن خط وقتی‌که نقطه روی آن شاخه بی‌نهایت دورشود به‌سمت صفر میل‌کند.

درشکلهای صفحه بعد هریك از منحنیها دارای شاخهٔ بی‌نهایت است و حالتهای مختلف مجانب را نشان می‌دهند.

خط مجانب منحنی ، ممکن است موازی‌محور y ها باشد که دراین صورت آنرا اصطلاحاً مجانب قائم گویند شکل (a) ، و ممکن است موازی محور x ها باشد، که در این صورت



(a) (b) (c)

اصطلاحاً آنرا مجانب افقی گویند شکل (b) ، و ممکن‌است محورهای مختصات را قطع کند که در این‌صورت اصطلاحاً آنرا مجانب مایل گویند شکل (c). خط مجانب منحنی ممکن‌است منحنی را دریك یاچند نقطهٔ قطع کند شکلهای (b) و (c).

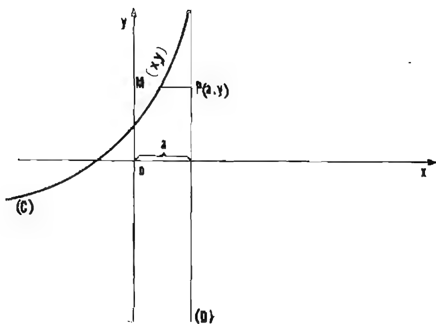
۱-۳۵- قضیهٔ I- اگردرتابع $y=f(x)$ داشته باشیم:

$$\begin{cases} x\to a^+ \\ y\to+\infty(\text{یا}-\infty) \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x\to a^- \\ y\to+\infty(\text{یا}-\infty) \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x\to a \\ y\to+\infty(\text{یا}-\infty) \end{cases}$$

خط D به معادلهٔ $x=a$ مجانب قائم منحنی است.

اثبات- فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه $M(x,y)$ از منحنی تا خط (D) عبارتست از:

$MP=|x-a|$، حال اگر نقطهٔ M روی منحنی بی‌نهایت دور شود یعنی $y=f(x)\to+\infty$ یا $y\to-\infty$ بنابه فرض داریم $x\to a$ یا $|x-a|\to 0$ یعنی فاصله MP به سمت صفرمیل کند و خط D مجانب منحنی خواهد بود. اثبات حالتهای $x\to a^+$ و $x\to a^-$ مشابه اثبات فوق است.



از آنچه گفته‌شد نتیجه می‌شود:

برای تعیین معادلهٔ مجانب قائم منحنی تـابع $y=f(x)$ باید a را چنان اختیار کنیم‌که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x\to a^+ \\ y\to+\infty(-\infty \text{یا}) \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x\to a^- \\ y\to+\infty(-\infty \text{یا}) \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x\to a \\ y\to+\infty(-\infty \text{یا}) \end{cases}$$

نتیجه ــ محور yها وقتی مجانب قائم است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x\to 0^+ \\ y\to+\infty(-\infty \text{یا}) \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x\to 0^- \\ y\to+\infty(-\infty \text{یا}) \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x\to 0 \\ y\to+\infty(-\infty \text{یا}) \end{cases}$$

مثال ۱- منحنی نمایش تابع باضابطهٔ $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ دارای مجانب قائم $x=1$ است‌زیرا:

$$\begin{cases} x\to 1^+ \\ y\to+\infty \end{cases}$$

مثال ۲- منحنی نمایش‌تابع باضابطه $y=\dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$ مجانب قائم $x=2$ دارد زیرا:

$$\begin{cases} x\to 2^- \\ y\to+\infty \end{cases}$$

مثال ۳- خط مجانب قائم منحنی تابع $y=\dfrac{x-4}{(x-3)^2}$ به معادلهٔ $x=3$ است‌زیرا:

$$\begin{cases} x\to 3 \\ y\to-\infty \end{cases}$$

مثال۴- مجانب‌قائم منحنی‌تابع $y=\frac{۱}{x}$ خط $x=۰$ (محور yها) است:

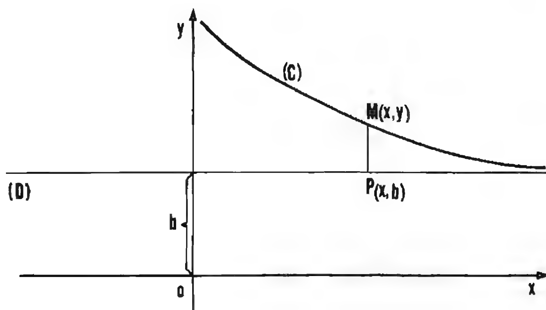
$$\begin{cases} x\to ۰^- \\ y\to -\infty \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x\to ۰^+ \\ y\to +\infty \end{cases}$$

مثال۵- منحنی نمایش‌تابع $y=\frac{-۲}{(x-۴)(x+۱)^۲}$ دومجانب قائم به‌معادله‌های $x=۴$ و $x=-۱$ دارد. زیرا:

$$\begin{cases} x\to ۴^- \\ y\to +\infty \end{cases} \quad ، \quad \begin{cases} x\to ۴^+ \\ y\to -\infty \end{cases} \quad ، \quad \begin{cases} x\to -۱ \\ y\to +\infty \end{cases}$$

۱-۳۶- قضیهٔ II- هرگاه در تابع $y=f(x)$ وقتی $x\to +\infty$ یا $x\to -\infty$ داشته باشیم $y\to b$ خط D به معادلهٔ $y=b$ مجانب افقی منحنی است.

اثبات ـ فاصلهٔ نقطه $M(x \text{ و } y)$ از منحنی تا خط D به معادلهٔ $y=b$ عبارتست از : $MP=|y-b|$. حال‌اگر Mروی منحنی بی‌نهایت دور شود یعنی $x\to +\infty$ یا $x\to -\infty$ مطابق‌آنچه درفرض داریم $f(x)=y\to b$ پس $|y-b|\to ۰$ یعنی فاصلهٔ MP به‌صفر میل‌می‌کند وخط D مجانب منحنی خواهد بود .



از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود :

برای تعیین مجانب افقی منحنی تابع $y=f(x)$ باید b را قسمی اختیار کنیم که داشته باشیم

$$\begin{cases} x\to +\infty \\ y\to b \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to -\infty \\ y\to b \end{cases}$$

نتیجه ـ محور xها وقتی مجانب منحنی است که داشته باشیم: $\begin{cases} x\to+\infty \\ y\to 0\end{cases}$ یا $\begin{cases} x\to-\infty \\ y\to 0\end{cases}$

مثال ۱ـ مجانب افقی منحنی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{2}{x^2+4}+1$ به معادلهٔ $y=1$ است زیرا داریم:

$$\begin{cases} x\to\pm\infty \\ y\to 1\end{cases}$$

مثال ۲ـ مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $y=3+\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ عبارتند از $x=1$ و $y=3$ چون داریم:

$$\begin{cases} x\to 1^- \\ y\to+\infty\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x\to-\infty \\ y\to 3\end{cases}$$

مثال ۳ـ منحنی نمایش تابع $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$؛

الف ـ مجانب قائم ندارد، زیرا به ازای هر مقدار حقیقی از x این تابع پیوسته بوده و دارای حد با پایان است. (توجه کنید که عبارت مخرج تابع صفر نمی‌شود)

ب ـ دو مجانب افقی به معادله‌های $y=+1$ و $y=-1$ دارد زیرا:

$$y=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$$

$$x>0 \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} \Rightarrow \begin{cases} x\to+\infty \\ y\to+1\end{cases}$$

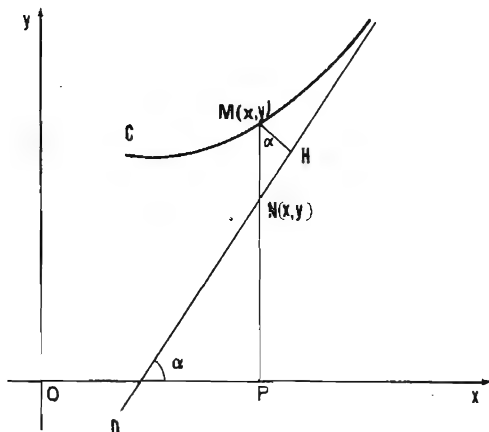
$$x<0 \Rightarrow y=\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} \Rightarrow \begin{cases} x\to-\infty \\ y\to-1\end{cases}$$

۱ـ۳۷ـ قضیهٔ III ـ اگر خط D به معادلهٔ $Y=mx+h$ مجانب مایل منحنی تابع $y=f(x)$ باشد داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} y-Y=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}(y-Y)=0$$

اثبات ــ چون خط D مجانب منحنی است پس $\lim_{x\to+\infty} MH=0$ یا $\lim_{x\to-\infty} MH=0$.

فرض کنید $\lim_{x\to+\infty} MH=0$ اگر α زاویهٔ خط D با محور Ox باشد چون خط D موازی yy' نیست $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ و در نتیجه $\cos\alpha\neq0$.



در مثلث قائم الزاویهٔ MNH داریم $MH=MN\cos\alpha$ چون حد MH وقتی نقطهٔ M روی منحنی بی‌نهایت دور شود صفر است، حد طرف دوم نیز صفر خواهد شد و با توجه به اینکه $\cos\alpha\neq0$ پس حد MN صفر خواهدشد یعنی داریم :

$$\lim_{x\to+\infty} MN=\lim_{x\to+\infty}|PM-PN|=\lim_{x\to+\infty}(y-Y)=0$$

اثبات درحالت $\lim_{x\to-\infty} MH=0$ شبیه به فوق‌است.

۱ــ۳۸ــ عکس قضیهٔ III ــ هرگاه تابع $y=f(x)$ وخط D به معادلهٔ $Y=mx+h$ را داشته باشیم به‌قسمی‌که $\lim_{x\to+\infty}(y-Y)=0$ یا $\lim_{x\to-\infty}(y-Y)=0$، آنگاه خط D مجانب منحنی است.

اثبات ـ فرض کنید $\lim_{x\to+\infty}(y-Y)=0$. هرگاه دونقطهٔ M و N را به ترتیب روی منحنی

وخط D با یک طول انتخاب کنیم داریم: $NM=|y-Y|$ وچون نقطه روی منحنی بی‌نهایت

دور شود با استفاده ازفرض داریم: $\lim_{x\to+\infty}|y-Y|=0$ یعنی $\lim_{x\to+\infty}NM=0$ وباتوجه به‌رابطهٔ

$MH=MN.\cos\alpha$ که طرف دوم آن به سمت صفر میل می‌کند خواهیم داشت :

$\lim_{x\to+\infty}MH=0$ یعنی خط D مجانب منحنی است.

اثبات درحالتیکه $\lim_{x\to-\infty}(y-Y)=0$ شبیه به‌حالت‌فوق‌است. باتوجه به‌قضیه III وعکس

آن داریم :

شرط لازم وکافی برای‌اینکه‌خط D به معادلهٔ $Y=mx+h$ مجانب مایل منحنی

تـابع $y=f(x)$ باشد این است که :

$$\lim_{x\to+\infty}|y-Y|\to 0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}|y-Y|=0$$

نتیجه ـ تابعهایی که به‌صورت $y=mx+h+\frac{F(x)}{G(x)}$ بوده و درجهٔ صورت کسر یعنی

$F(x)$ کمتر از درجهٔ مخرج یعنی $G(x)$ باشد دارای‌مجانب مایل $Y=mx+h$ می‌باشند،

زیرا داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}|y-Y|=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}|y-Y|=0$$

۱ـ۳۹ـ روش تعیین مجانب مایلـ برای تعیین $y=mx+h$، معادلهٔ خط مجانب مایل

منحنی تابع $y=f(x)$ ، درصورت وجود، کافی‌است مقادیر m و h را تعیین‌کنیم به‌قسمی که:

$$\lim_{x\to+\infty}(y-mx-h)=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}(y-mx-h)=0$$

برای این‌کار به شرح زیر عمل می‌کنیم . (فقط برای حالت $x\to+\infty$ بحث را ادامه

می‌دهیم وحالت $x\to-\infty$ شبیه به‌آن است):

$$m=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{y-h}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{y}{x}-\frac{h}{x}\right)$$

هـرگاه $x \to +\infty$ ، حد $\frac{h}{x}$ برابر صفراست. بنابراین:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x}$$

پس از تعیین مقدار m از رابطهٔ $\lim_{x \to +\infty} (y - mx - h) = 0$ نتیجه می‌شود:

$$h = \lim_{x \to +\infty} (y - mx)$$

تبصرهٔ ۱ـــ در موقع تعیین m و h اگر $m = 0$ و h حد معینی داشته باشد ، مجانب حاصل افقی و معادله‌اش $y = h$ است.

تبصرهٔ ۲ـــ مجانب مایل $y = mx + h$ را می‌توان مماس برمنحنی (C) نمایش تابع $y = f(x)$ دانست که نقطهٔ تماسش در بی‌نهایت باشد : بنابراین اگر معادله‌های:

$$y = f(x) \quad \text{و} \quad y = mx + h$$

را باهم حل کنیم طول نقاط برخورد خط ومنحنی از معادلهٔ $f(x) - mx - h = 0$ (۱) بدست می‌آید. حال اگر $f(x)$ یك عبارت جبری برحسب x باشد ، چون معادلهٔ اخیر باید دارای ریشه مضاعف ∞ باشد باید ضرایب دو جملهٔ بزرگترین درجهٔ معادله (۱) را[پس از حذف مخرجها و رادیکالها] مساوی صفر قرار داد تا m و h بدست آید. (درموقعی که تابع $y = f(x)$ گنگ وشامل ریشگی زوج است ، باید طرفین معادله را به توان زوج رساند تا از صورت گنگی خارج شود ، در این صورت باید دقت نمود که مقادیر m و h بدست آمده ریشهٔ خارجی نباشد.)

مثال ۱ـ مطلوبست تعیین معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع باضابطهٔ : $y = x + 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$

حل: خط $y = x + 1$ مجانب مایل تابع است زیرا داریم:

$$y - x - 1 = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (y - x - 1) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

مثال ۲ـــ مطلوب است تعیین معادلات خطوط مجانب منحنی نمایش تابع $y = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$

حل : خط $x=-1$ مجانب قائم منحنی تابع است زیرا داریم :

$$\begin{cases} x\to -1 \\ y\to \pm\infty \end{cases}$$

هر گاه $x\to\pm\infty$ در این صورت $y\to\pm\infty$ پس منحنی مجانب افقی ندارد وچون درجهٔ عبارت صورت یک‌واحد بیش از درجهٔ عبارت مخرج است پس منحنی مجانب مایل‌دارد. تابع را می‌توان بــه‌صورت $y=x-1-\dfrac{2}{x+1}$ نوشت (صورت را بــر مخرج تقسیم کــردیم) بنا براین خط $y=x-1$ مجانب مایل منحنی تابع است .

مثال ۳— مطلوب است تعیین معادله‌های مجانبهای منحنی تابع $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

حل : چون $x^2+1\neq 0$ **پس منحنی مجانب قائم ندارد . همچنین منحنی مجانب افقی ندارد زیرا :**

$$\begin{cases} x\to \pm\infty \\ y\to \pm\infty \end{cases}$$

برای تعیین معادلهٔ مجانب مایل باید m و h راپیدا کنیم به‌قسمی که:

$$m=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{y}{x} \text{ و } h=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ (y-mx) \quad \text{یا} \quad m=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\ \frac{y}{x} \text{ و } h=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}(y-mx)$$

به ترتیب چنین عمل می‌کنیم:

$$\frac{y}{x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$m_1=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$$

$$m_2=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\ \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\ \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$$

$$h_1=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ (y-x)=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}-x\right)=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{x^2-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{x^4-x^4-x^2}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+x\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}(x^2+x\sqrt{x^2+1})} = 0$$

$$h_2 = \lim_{x \to -\infty} (y+x) = \dots = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}(x^2-x\sqrt{x^2+1})} = 0$$

پس معادله‌های مجانبهای مایل منحنی عبارتند از:

$y=x$ و $y=-x$

مثال ۴ — مطلوب‌است تعیین معادله های مجانبهای منحنی تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$

حل : منحنی مجانب قائم ندارد ، مجانب افقی نیز ندارد زیرا :

$$\begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to \pm\infty \end{cases}$$

اگر معادلهٔ مجانب مایل $y=mx+h$ باشد، از حذف y بین :

$y=mx+h$ و $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$

نتیجه می‌شود:

$$x^3-3x^2+1=m^3x^3+3m^2hx^2+3h^2mx+h^3$$

$$(m^3-1)x^3+3x^2(m^2h+3)+\cdots\cdots=0$$

دوتا از ضرایب بزرگترین درجه را صفر می‌گیریم:

$$\begin{cases} m^3-1=0 \\ m^2h+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ h=-3 \end{cases}$$

پس $y=x-3$ مجانب مایل منحنی تابع است

تبصرهـ هرگاه دو منحنی (C) و (C') نمایش تابعهای $y_1=f(x)$ و $y_2=g(x)$ باشند وداشته‌باشیم:

$$\lim_{x \to +\infty} |y_1-y_2|=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to -\infty} |y_1-y_2|=0$$

دو منحنی را مجانب یکدیگر گوئیم.

مثالـ منحنیهای نمایش دو تابع $y_1=x^2+\frac{1}{x+1}$ و $y_2=x^2$ مجانب یکدیگرند

زیرا :

$$\lim_{x \to \pm\infty} |y_1-y_2| = \lim_{x \to \pm\infty} \left|\frac{1}{x+1}\right| = 0$$

تمرین

معادلات خطوط مجانب هریك از تابعهای زیر را تعیین کنید.

۱) $y=\dfrac{x-3}{x-2}$

۲) $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

۳) $y=\dfrac{3x^2+x-1}{x-1}$

۴) $y=\dfrac{x^3-x^2}{x^2-4}$

۵) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-9}$

۶) $y=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

۷) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}+2$

۸) $y=x-1+\sqrt{x^2-4x}$

۹) $y=x+2-\sqrt{x^2+2x+3}$

۱۰) $y=\sqrt[3]{8x^3-24x^2+x}$

۱۱) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x-1}$

۱۲) $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}$

۱۳) $y=\sqrt[3]{x^3+x}$

۱۴) $y=\dfrac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x-2}$

۱۵) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{4x^2+1}}{x+1}$

۱۶) $y=\dfrac{\sqrt{x^4+1}+2x^2+1}{x}$

۱۷) $y=\dfrac{\sqrt{x^4+x^3+x^2+1}}{x}$

۱۸) $y=x\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$

۱۹) $y=\sqrt{\dfrac{x^3-7}{x-2}}$

۲۰) $y=\sqrt{\dfrac{x^4-1}{x^2-4}}$

۲۱) $y=\mathrm{Arc}\,tg\,x$

۲۲) $y=\mathrm{Arc}\,cotg\,x$

۲۳) $y=\mathrm{Arc}\,tg\,3x$

۲۴) $y=\dfrac{2}{\mathrm{Arc}\cos x}$

۲۵- تحقیق کنید منحنی (C') به معادلهٔ $y_2=\dfrac{x^2+1}{x}$ مجانب منحنی (C) بـه معادلهٔ $y_1=\dfrac{x^4+x^2+1}{x(x^2+1)}$ می‌باشد، ضمناً تحقیق کنید دو منحنی دارای خطـوط مجانب مشترکند و معادلات آن خطوط را تعیین کنید.

۲۶- تابع با ضابطهٔ $y_1=\frac{ax^2+bx+c}{x+2c}$ مفروض‌است:

الف - پارامترهای a و b و c را چنان تعیین‌کنید که منحنی این تابع دارای مجانبهایی به معادلات $x+4=0$ و $y-x+1=0$ باشد.

ب - مجانبهای منحنی تابع $y=\frac{1}{y_1}$ را به‌ازاء مقادیر حاصلهٔ a و b و c که‌در فرض‌الف بدست‌آمده است تعیین کنید.

۲۷- تابع زیر مفروض است:

$$y=2x+a+\sqrt{ax^2+bx+3}$$

الف - پارامترهای a و b را چنان تعیین کنید که منحنی تابع فوق وقتی $x\to+\infty$ دارای مجانب مایلی به معادلهٔ $y=4x+3$ باشد.

ب - به ازای مقادیر حاصلهٔ a و b مجانب دیگر تابع را تعیین‌کنید.

۲۸- به فرض اینکه t از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند و داشته باشیم:

$$y=\frac{t^2}{t+1} \quad \text{و} \quad x=\frac{t^3}{t^2+1}$$

خواهیم داشت $y=f(x)$ ، مطلوبست تعیین معادلات خطوط مجانب منحنی تابع $y=f(x)$

۲۹- تابع $y=ax+b+\sqrt{(px+q)^2+1}$ (که درآن $p>0$) **مفروض است.**

تحقیق‌کنید منحنی این تابع دارای دو مجانب به معادله‌های ذیل است:

$$\begin{cases} Y_1=ax+b+(px+q) \text{ ، } x\to+\infty \\ Y_2=ax+b-(px+q) \text{ ، } x\to-\infty \end{cases}$$

(راهنمائی : حد $|y-Y_1|$ را وقتی‌که $x\to\pm\infty$ تعیین‌کنید) .

۳۰- تابع $y=ax+b-\sqrt{(px+q)^2+1}$ که درآن $p>0$ **مفروض است.**

تحقیق کنید منحنی این تابع دارای دو مجانب به معادله‌های ذیل است:

$$\begin{cases} Y_1=ax+b+(px+q) \text{ ، } x\to-\infty \\ Y_2=ax+b-(px+q) \text{ ، } x\to+\infty \end{cases}$$

(راهنمائی: مانند مسئلهٔ قبل حد $|y-Y_1|$ را وقتیکه $x\to\pm\infty$ تعیین‌کنید) :

یادآوری: با استفاده از فرمولهایی که از حل‌مسائل ۲۹ و ۳۰ برای تعیین‌مجانبها نمودید

می‌توانید مجانبهای منحنیهای تابعهای $y=ax+b\pm\sqrt{cx^{2}+dx+e}$ را در حالتی که $c>0$ است به سهولت تعیین کنید.

۳۱- خطوط مجانب منحنی تابع زیر را تعیین کنید:

$$y=3x-2+\sqrt{x^{2}-2x+3}$$

حل: با استفاده از فرمولی که در حل مسئلهٔ ۲۹ بدست‌آوردیم مجانبها را تعیین می‌کنیم:

ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=3x-2+\sqrt{(x-1)^{2}+2}$$

$$x\to+\infty \;\text{،}\; Y_{1}=3x-2+(x-1) \Longrightarrow Y_{1}=4x-3$$

$$x\to-\infty \;\text{،}\; Y_{2}=3x-2-(x-1) \Longrightarrow Y_{2}=2x-1$$

۳۲- خطوط مجانب منحنی تابع $y=x-3+\sqrt{x^{2}-4x}$ را به وسیلهٔ فرمولی که ازحل مسئلهٔ ۲۹ فرا گرفتید تعیین کنید.

خطوط مجانب منحنیهای هریك از توابع ذیل را به‌کمك دستورهائی که از حل مسئلهٔ ۲۹ و ۳۰ یاد گرفتید تعیین کنید.

۳۳) $y=2x-1-\sqrt{4x^{2}-12x}$

۳۴) $y=2x-\sqrt{x^{2}-4x+3}$

۳۵) $y=3x-\sqrt{9x^{2}+9x-1}$

۳۶) $y=2+\sqrt{x^{2}+1}$

۳۷) $y=\sqrt{x^{2}-4x}$

۳۸) $y=-x+2-\sqrt{x^{2}-1}$

۳۹- تابع باضابطهٔ $y=mx+n+\sqrt{x^{2}-6x}$ مفروض است.

الف- m و n را چنان تعیین کنید که منحنی‌تابع وقتی $x\to+\infty$ دارای مجانب مایلی به معادلهٔ $y=3x-2$ باشد. به‌ازاء مقادیر حاصل n و m مجانب دیگر منحنی را تعیین کنید.

فصل ۲

بررسی تغییرات توابع

بررسی تغییرات تابع $f : x \longmapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$

۲-۱ - کلیات - قبلا نکات کلی و خواص عمومی تابع را مورد مطالعه قرار داده و سپس حالات مختلف آنرا در نظر می‌گیریم:

برای اینکه این تابع کسری هموگرافیك نباشد بایدلااقل یکی ازضرایب a و a' مخالف صفر باشد.

حالات مخصوص:

۱- اگر $a'=b'=0$ آنوقت نمودار تابع یك سهمی است که قبلا دربارهٔ آن **صحبت کرده و تغییرات آنرا تحقیق کرده‌ایم.**

۲- اگر $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=k$ **،دراین صورت هرگاه صورت ومخرج تابع ریشه نداشته باشند تابع خط $y=k$ می‌باشد. اگر صورت ومخرج هرکدام دارای ریشه‌های متمایز x_1وx_2 باشند تابع y به ازای $x=x_1$ و$x=x_2$ تعریف نشده‌است. هرگاه صورت و مخرج هرکدام دارای ریشهٔ مضاعف x باشند باز تابع y به ازای $x=x_0$ تعریف نشده است.**

۳- اگر صورت و مخرج فقط دارای یك ریشهٔ مشترك x_0 باشند صورت و مخرج دارای عامل مشترك $x-x_0$ بوده و نمودار آن با شرط $a'\neq 0$ یك منحنی هموگرافیك (به ازای مقادیر $x\neq x_0$) خواهد بود (می‌توان دیدکه چون صورت ومخرج دارای یك‌ریشهٔ مشترکند بین ضرایب a و b و c و a' و b' و c' رابطهٔ $(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0$ برقرار می‌باشد).اگر $a'=0$ ، آنوقت منحنی به یك خط مستقیم که فقط نقطهٔ نظیر x_0 از آن برداشته شده است تبدیل می‌شود.

مشتق تابع در حالت کلی عبارت است از:

$$y'=\frac{(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+bc'-cb'}{(a'x^2+b'x+c')^2}$$

اکنون تغییرات تابع را در حالتهای مختلف بررسی می‌کنیم:

۳ــ۲ ــ حالت اول : $a'=0$ و $a\neq 0$ و $b'\neq 0$

دراین حالت داریم :

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{b'x+c'}$$

که ز تقسیم صورت و مخرج بر b' داریم : $y=\dfrac{\frac{a}{b'}x^2+\frac{b}{b'}x+\frac{c}{b'}}{x+\frac{c'}{b'}}$ و یا :

$$y=\frac{Ax^2+Bx+C}{x-d}$$

فرض کنید که d ریشه‌صورت کسر نباشد [زیرا دراین صورت تابع به معادله یك خط (به‌استثنای یك‌نقطه) تبدیل می‌شود] . باتقسیم صورت برمخرج هرگاه خارج قسمت را $Ax+h$ وباقیمانده را که مخالف صفر است l بنامیم داریم:

$$(1)\quad y=Ax+h+\frac{l}{x-d}$$

چنانکــه دیده می‌شود تابع(۱) به‌ازای تمام‌مقادیر x به‌استثنای $x=d$ معین و پیوسته است و منحنی آن دارای مجانب قائم $x=d$ و مجانب مایل $Y=Ax+h$ می‌باشد.

هرگاه محورهای مختصات را به موازات خودوهم جهت باآن به‌قسمی تغییردهیم که نقطه $\omega(d$ و $Ad+h)$ (محل برخورد دو مجانب) مبدأ جدیدمختصات باشد معادله (۱) در دستگاه جدید با توجه به اینکه $x=X+d$ و $y=Y+Ad+h$ است چنین خواهد بود:

$$(2)\quad Y=AX+\frac{l}{X}$$

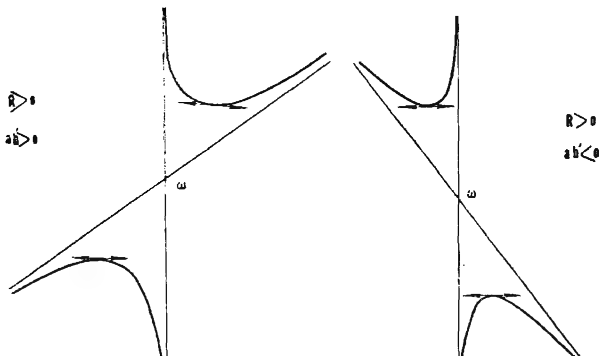
چنانکه از معادله (۲) دیده می‌شود نقطه ω (مبدأ جدید مختصات که محل برخورد دو مجانب است) مرکز تقارن منحنی است زیـرا اگـر X را به $-X$ تبدیل کنیم Y به $-Y$ تبدیل می‌شود .

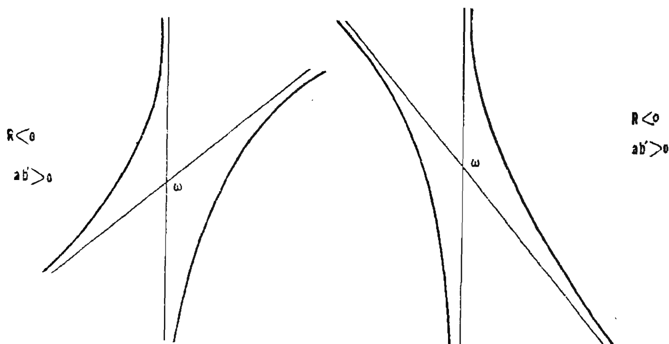
مشتق تابع(۲) نسبت به X به‌صورت $Y'=A-\dfrac{l}{X^2}$ یا $Y'=\dfrac{AX^2-l}{X^2}$ درمی‌آید. اگر A و l متحد العلامت باشند مشتق‌دارای دو ریشهٔ $X=\pm\sqrt{\dfrac{l}{A}}$ است که به ازاء آنها صفرشده وتغیر علامت می‌دهد . در نتیجه تابع‌دارای یك ماکزیمم ویك می‌نیموم است . اگر **A و l مختلف‌**العلامت باشند مشتق ریشه ندارد و تابع همواره‌صعودی یا نزولی است. نتیجه اینکه هرگاه **R**

مبین سه جمله‌ای صورت مشتق تابع اصلی یعنی مبین سه جمله‌ای صورت کسر :

$$y' = \frac{ab'x^{2} + 2ac'x + (bc' - cb')}{(b'x + c')^{2}}$$

مثبت باشد تابع دارای یك ماکزیمم و می‌نیموم است و اگر $R < 0$ باشد تابع ماکزیمم و می‌نیموم ندارد منحنی همواره نسبت به نقطهٔ ω محل برخورد مجانبها متقارن است و نمودار منحنی به‌صورت یکی از اشکال چهارگانهٔ زیر است





مثال - تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی (C) نمایش تابع با ضابطهٔ

$$y=\frac{x^{2}-3x}{x-4}$$

تابع به ازای همه مقادیر x به استثنای $x=4$ معین و پیوسته است. منحنی نمایش تابع دارای محانب قائم $x=4$ است. برای تعیین مجانب مایل، تابع راچنین می‌نویسیم:

$$y=x+1+\frac{4}{x-4}$$

پس خط به معادلهٔ $y=x+1$ مجانب مایل منحنی است.

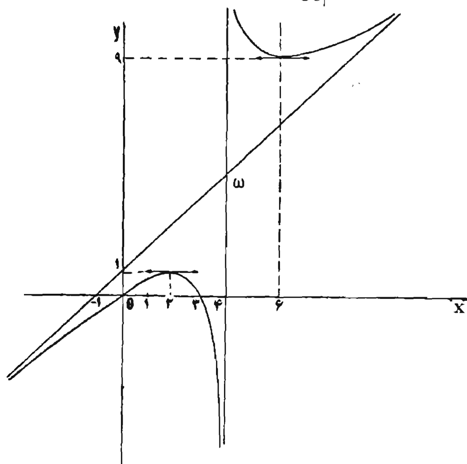
مشتق تابع پس از اختصار می‌شود:

$$y'=\frac{x^{2}-8x+12}{(x-4)^{2}}$$

در ازای $y'=0$ داریم $x=2$ یا $x=6$ پس تابع یك ماکزیمم ویك مینیمم دارد. در ازای $x=0$ داریم $y=0$ و در ازای $y=0$ داریم $x=0$ یا $x=3$ هرگاه $x\rightarrow\pm\infty$ داریم $y\rightarrow\pm\infty$.

جدول تغییرات تابع و شکل منحنی به شرح زیر است:

x	$-\infty$		0		2		3		4		6	$+\infty$
y'			$+$		0		$-$		‖	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	9 ↗	$+\infty$



تبصره- ثابت می‌شود که منحنی (C) نمایش هندسی تابع با ضابطهٔ

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{b'x+c'}$$

یك هذلولی است. این منحنی علاوه برخاصیت داشتن مرکز تقارن، که در بالا بدان اشاره شد، خاصیتهای دیگری نیز دارد. یك خاصیت جالب منحنی که برای رسم دقیق آن بکار می‌رود در زیر ذکر می‌شود:

۲-۳ - قضیه- اگر خط غیر مشخص D منحنی (C) نمایش هندسی تابع با ضابطهٔ

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{b'x+c'}$$

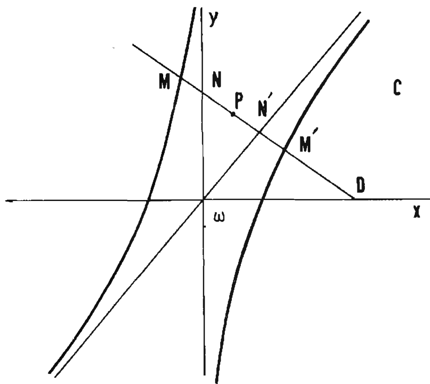
را در دونقطه M و M' و مجانبهای آن را در نقطه‌های N و N' قطع کند، همواره:

$$MN=M'N'$$

برهان: کافی است ثابت کنیم که وسط MM' بر وسط NN' منطبق است.

برای سادگی محاسبات، دستگاه مختصات را چنان انتخاب می کنیم که ω محل برخوردمجانبهای منحنی مبدأ مختصات و محور yها بر مجانب قائم منحنی واقع باشد. در این صورت معادلهٔ تابع به صورت:

$$(1)\quad y=Ax+\frac{1}{x}$$



و معادله توأم مجانبها به‌صورت

$$(۲)\ x(y-Ax)=0$$

می‌باشد. معادله خط (D) را به‌صورت کلی

$$(۳)\ y=\alpha x+\beta$$

انتخاب می‌کنیم. از حذف y بین معادله‌های (۱) و (۳) و پس از اختصار خواهیم داشت:

$$(A-\alpha)x^2-\beta x+1=0$$

x' و x'' ریشه‌های این معادله طولهای نقطه‌های M و M' می‌باشند. بنابراین طول نقطه P وسط MM' می‌شود:

$$x_P=\frac{x'+x''}{۲}=\frac{\beta}{۲(A-\alpha)}$$

همچنین از حل معادله‌های (۲) و (۳) باهم داریم:

$$x(\alpha x+\beta-Ax)=0$$

یا

$$(A-\alpha)x^2-\beta x=0$$

x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله طولهای نقطه‌های N و N' می‌باشند. پس طول نقطهٔ P' وسط NN' می‌شود:

$$x_{P'}=\frac{x_1+x_2}{۲}=\frac{\beta}{۲(A-\alpha)}$$

از تساوی $x_P=x_{P'}$ و با توجه به اینکه P و P' برخط D واقعند، نتیجه می‌شود که P و P' برهم منطبقند و قضیه ثابت است.

تمرین

مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش هریك از تابعهای زیر:

۱) $y=\frac{x^2-۴}{x}$

۲) $y=\frac{x^2+۴}{x}$

۳) $y=\frac{x^2-۴x+۳}{۳x-۱}$

۴) $y=x+۱+\frac{۴}{x+۱}$

۵) $y=x-۱-\frac{۴}{x-۱}$

۶) $y=|x-۲|+\frac{۴}{x-۲}$

۷) در تابع $y=\frac{x^2+ax+۱۰}{x+b}$ مقادیر a و b را چنان‌تعیین‌کنید که $\omega(۱,0)$ مرکز تقارن منحنی نمایش تابع باشد. پس از تعیین a و b منحنی را رسم‌کنید.

۲-۴ - حالت دوم: $a'\neq 0$ در این حالت داریم:

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \quad \text{و} \quad a'\neq 0$$

الف ـ مبین سه‌جمله‌ای مخرج کسر را Δ می‌نامیم:

$$\Delta=b'^2-4a'c'$$

هرگاه $\Delta<0$ تابع همواره معین و پیوسته است. هرگاه $\Delta=0$ تابع به ازای همهٔ

مقادیر x به‌استثنای $x=-\frac{b'}{2a'}$ معین و پیوسته است و منحنی تابع یك مجانب قائم به‌معادلهٔ

$x=-\frac{b'}{2a'}$ دارد. هرگاه $\Delta>0$ تابع به ازای همهٔ مقادیر x به استثنای $x=x_1$ و

$x=x_2$، ریشه‌های سه جمله‌ای مخرج کسر تابع، معین‌وپیوسته است ومنحنی نمایش تابع دو

مجانب قائم به‌معادله‌های $x=x_1$ و $x=x_2$ دارد.

ب ـ مشتق تابع عبارت است از:

$$y'=\frac{(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+bc'-cb'}{(a'x^2+b'x+c')^2}$$

مبین عبارت صورت این کسر را R می‌نامیم:

$$R=(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')$$

هرگاه $ab'-ba'=0$ مشتق یك ریشه دارد و تابع معمولا فقط یك ماکزیمم یا

فقط یك می‌نیمم دارد.

هرگاه $ab'-ba'\neq 0$ و $R>0$ مشتق دو ریشه دارد که به ازای آنها تغییر علامت می‌دهد و تابع یك ماکزیمم و یك می‌نیمم دارد. هرگاه $R<0$ مشتق علامت ثابت دارد و تابع یا همواره صعودی یاهمواره نزولی است.

(R نمی‌تواند صفر شود زیرا در این‌صورت سه جمله‌ایهای صورت و مخرج تابع ریشهٔ مشترك دارند که این حالت ضمن حالتهای خاص قبلا ذکر شده است).

ج ـ هرگاه $x\to\pm\infty$ حد y می‌شود $\frac{a}{a'}$ پس منحنی نمایش تابع همواره دارای

مجانب افقی $y=\frac{a}{a'}$ است.

د ـ هرگاه داشته باشیم:

$$ab'-ba'=0 \qquad (1)$$

آنگاه منحنی نمایش تابع دارای محور تقارن $x=-\frac{b}{2a}$ است. اگر $a\neq 0$ و دارای محور تقارن $x=-\frac{b'}{2a'}$ است اگر $a=0$. مطلب را درحالت $a\neq 0$ و $b'\neq 0$ ثابت می‌کنیم وبقیهٔ حالتها را به عنوان تمرین به عهده دانش‌آموزان می‌گذاریم . دراین حالت معادله (۱) هم ارز با هریك ازتساویهای $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$ و $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ می‌باشد. ازتلاقی خط $y=m$ با منحنی تابع داریم :

$$(ma'-a)x^2+(mb'-b)x+mc'-c=0$$

که ریشه‌های این معادله ، x' و x'' ، طولهای نقطه‌های برخورد خط ومنحنی می‌باشند و داریم:

$$\frac{x'+x''}{2}=\frac{-(mb'-b)}{2(ma'-a)}=\frac{-b'\left(m-\frac{b}{b'}\right)}{2a'\left(m-\frac{a}{a'}\right)}=-\frac{b'}{2a'}=-\frac{b}{2a}$$

بحث بالا در جدول زیر خلاصه می‌شود و در هریك از حالتها شکل منحنی در صفحه‌های بعد رسم می‌شود. (دراین جدول دلائل و همهٔ جزئیات نوشته نشده است)

$\Delta<0$ (مبین مخرج)
تابع همواره معین و پیوسته است .

- شکل (۱) : تابع دارای یك ماکزیمم و یك می‌نیموم است: $ab'-ba'>0$
- شکل (۲) : تابع دارای یك می‌نیموم و یك ماکزیمم است: $ab'-ba'<0$
- $ab'-ba'=0$ منحنی دارای محور تقارن $x=-\frac{b'}{2a'}$ یا $x=-\frac{b}{2a}$ می‌باشد
  - شکل (۳) : تابع فقط یك ماکزیمم دارد: $ac'-ca'<0$
  - شکل (۴) : تابع فقط یك می‌نیموم دارد: $ac'-ca'>0$

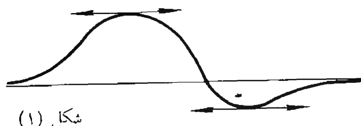
$\Delta=0$
منحنی یك مجانب قائم $x=-\frac{b'}{2a'}$ دارد

- شکل(۵) یا شکل(۶) : تابع فقط یك ماکزیمم یا فقط یك می‌نیموم دارد: $ab'-ba'>0$
- شکل(۷) یا شکل(۸) : تابع فقط یك مینیمم یا فقط یك ماکزیمم دارد: $ab'-ba'<0$
- **شکل(۹) یا شکل (۱۰): منحنی محور تقارن دارد ولی ماکزیمم و می‌نیموم ندارد :** $ab'-ba'=0$

$\Delta>0$ منحنـی دو مجانب‌قائم دارد	$R<0$	$ab'-ba'>0$ شکل (۱۱) : تابع همواره صعودی است
		$ab'-ba'<0$ شکل (۱۲) : تابع همواره نزولی است
	$R>0$	شکل(۱۳) یا شکل(۱۴) : تابع یک‌ماکزیمم‌ویک می‌نیموم دارد: $ab'-ba'>0$
		شکل(۱۵) یا شکل(۱۶) : تابع یک‌مینیمم و یک ماکزیمم دارد: $ab'-ba'<0$
	صورت‌مشتق‌درجه‌اول است: $ab'-ba'=0$ منحنی محور تقارن دارد	شکل (۱۷) : فقط یک ماکزیمم‌دارد: $ac'-ca'<0$
		شکل (۱۸) : فقط یک می‌نیموم دارد: $ac'-ca'>0$

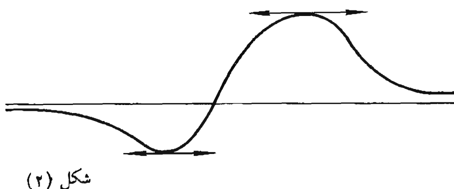
تذکر : مطالب بالاکه در مورد شکل منحنی نمایش توابع کسری درجه دوم گفته شد برای اطلاع بیشتردانش آموزان است که قبل‌ازتعیین‌جدول‌تغییرات از شکل آن آگاهی داشته باشند والا درموقع تعیین تغییرات یک‌تابع‌و رسم‌منحنی‌نمایش آن ضرورت‌نداردبه‌موضوع‌های گفته شده‌اشاره نمایند و اگر در اینجا ما در حل‌چند مسئلهٔ نمونه به‌آن اشاره نموده‌ایم برای روشن شدن‌مطلب برای آنان است.

$$\begin{cases}\Delta<0\\ ab'-ba'>0\end{cases}$$

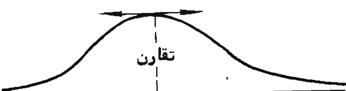


شکل (۱)

$$\begin{cases}\Delta<0\\ ab'-ba'<0\end{cases}$$

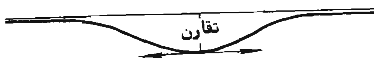


شکل (۲)



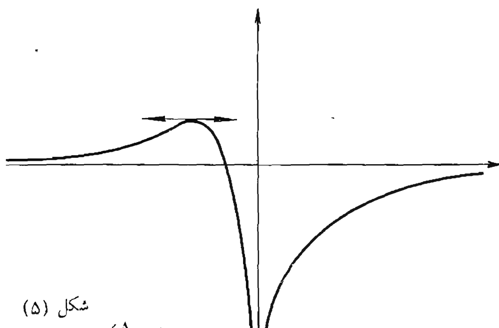
شکل (۳)

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ ab' - ba' = 0 \\ ac' - ca' < 0 \end{cases}$$



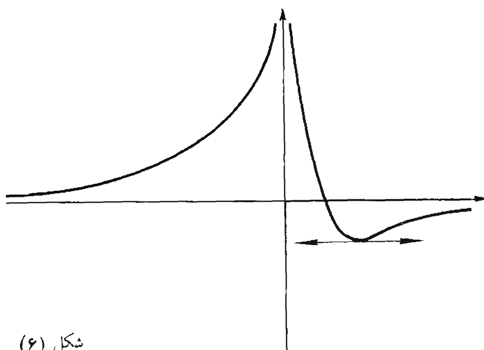
شکل (۴)

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ ab' - ba' = 0 \\ ac' - ca' > 0 \end{cases}$$

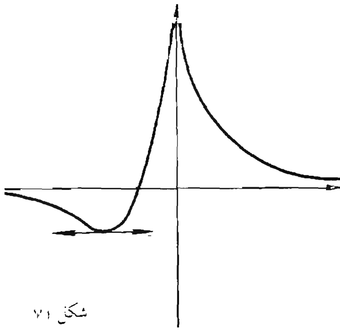


شکل (۵)

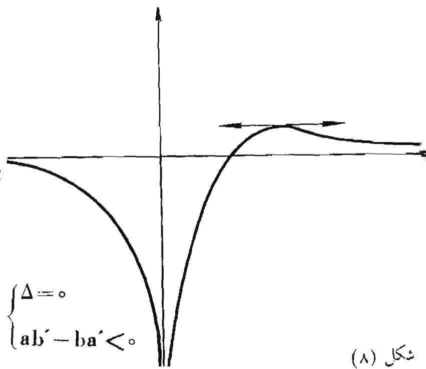
$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ ab' - ba' > 0 \end{cases}$$



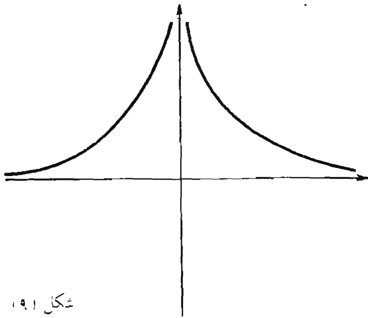
شکل (۶)



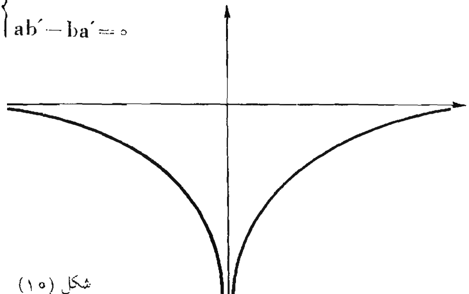
شکل (۷)



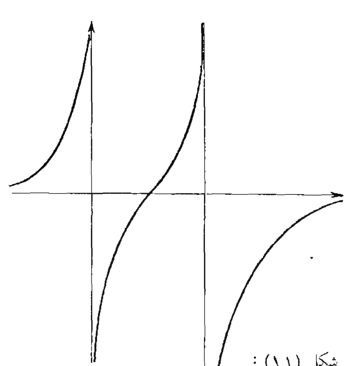
شکل (۸)



شکل (۹)

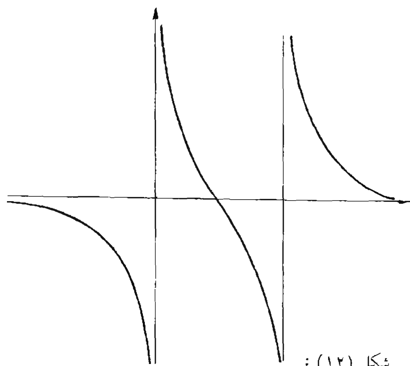


شکل (۱۰)



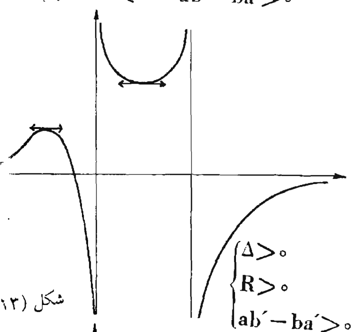
شکل (۱۱) :

$\Delta>0$ و $R<0$ و $ab'-ba'>0$



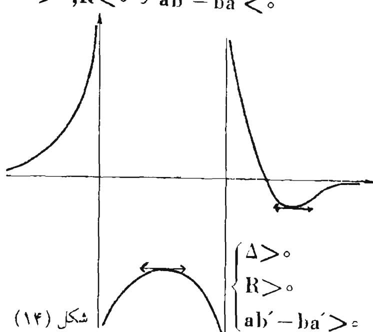
شکل (۱۲) :

$\Delta>0, R<0$ و $ab'-ba'<0$



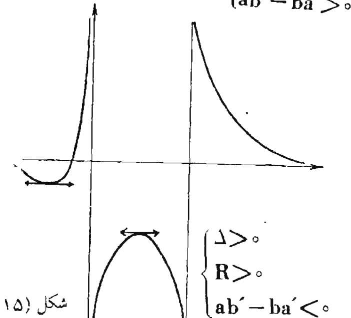
شکل (۱۳)

$\begin{cases}\Delta>0\\ R>0\\ ab'-ba'>0\end{cases}$



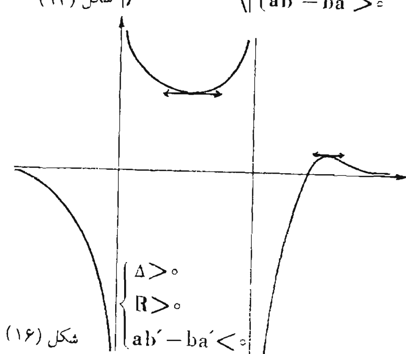
شکل (۱۴)

$\begin{cases}\Delta>0\\ R>0\\ ab'-ba'>0\end{cases}$



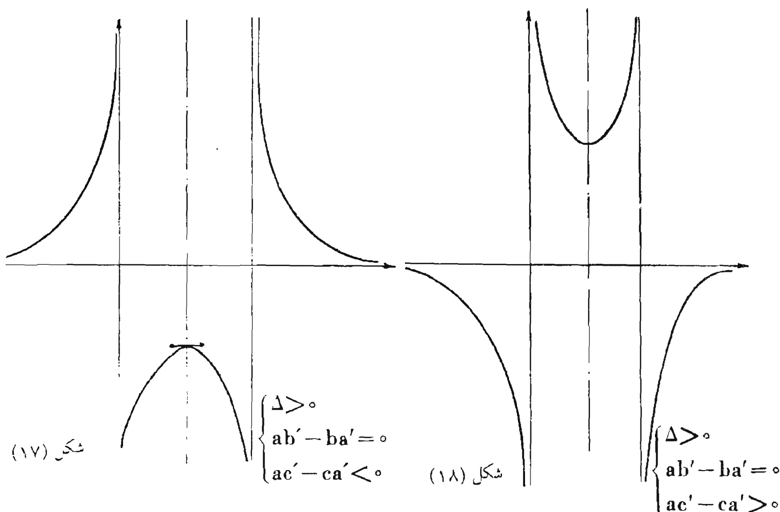
شکل (۱۵)

$\begin{cases}\Delta>0\\ R>0\\ ab'-ba'<0\end{cases}$



شکل (۱۶)

$\begin{cases}\Delta>0\\ R>0\\ ab'-ba'<0\end{cases}$



مثال۱- تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی (c) نمایش تابع باضابطهٔ

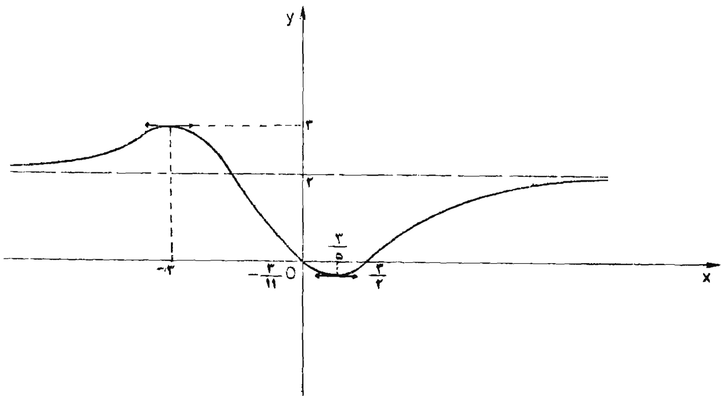
$$y=\frac{2x^2-3x}{x^2+x+3}$$

داریم: $\Delta=1-12<0$ پس تابع همواره معین و پیوسته است:

$$y'=\frac{5x^2+12x-9}{V^2} \qquad y'=0 \implies \begin{cases}x=-3 \ \text{یا}\ x=\frac{3}{5}\\ y=3 \ \text{و}\ y=-\frac{3}{11}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0 \ \text{یا}\ x=\frac{3}{2}\\ y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x\to\pm\infty\\ y=2\end{cases} \ y=2 \ \text{مجانب افقی}$$

x	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−		−	0	+		+	
y	2	↗	3	↘	0	↘	$-\frac{3}{11}$	↗	0	↗	2



مثال۲- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع

$$y=\frac{x^{۲}-۴x-۵}{x^{۲}-۴x+۵}$$

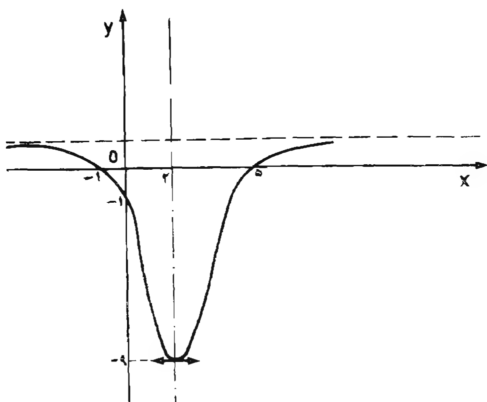
چون $\Delta<۰$ و $ab'-ba'=۰$ و $ac'-ca'=۱۰>۰$ پس تابع فقط یك می‌نیموم‌دارد

و منحنی دارای محور تقارن $x=\frac{-b'}{۲a'}=۲$ می‌باشد و طول نقطه می‌نیموم نیز همان ۲ است.

$$y'=\frac{۲۰x-۴۰}{V^{۲}} \quad ، \quad y'=۰\begin{cases}x=۲\\ y=-۹\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=۰\\ y=-۱\end{cases}\begin{cases}x=-۱ \text{ و } ۵\\ y=۰\end{cases}\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y=۱\end{cases}$$

x	$-\infty$			-۱		۰		۲		۵		$+\infty$
y'				—				۰		+		
y	۱	↘		۰	↘	-۱	↘	-۹	↗	۰	↗	۱



مثال۳- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ

$$y=\frac{x^2-4x}{x^2-2x+1}$$

چـون $\Delta=0$ و $ab'-ba'=2>0$ با توجه به اینکه:

$$\begin{cases} x\to 1 \\ y\to -\infty \end{cases}$$

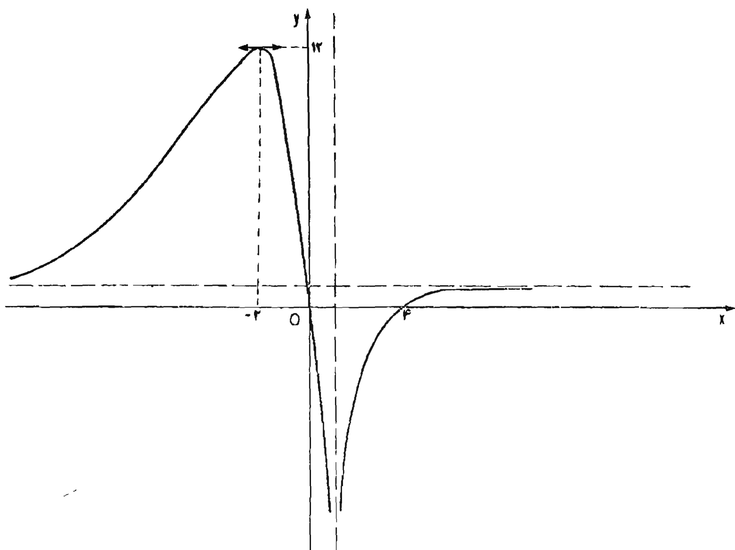
تابع فقط یك ماکزیمم دارد.

$$y'=\frac{2x^2+2x-4}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)(x+2)}{(x-1)^4}$$

$$y'=\frac{2(x+2)}{(x-1)^3}\quad ,\quad y'=0\begin{cases} x=-2 \\ y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \text{ و } 4 \\ y=0 \end{cases}\quad ,\quad \begin{cases} x\to 1 \\ y\to -\infty \end{cases}\quad ,\quad \begin{cases} x\to \pm\infty \\ y=1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0		1		4		$+\infty$
y'		+	0		−		|		+		
y	1	↗	12	↘	0	↘	$-\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	1



مثال۴- تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش:

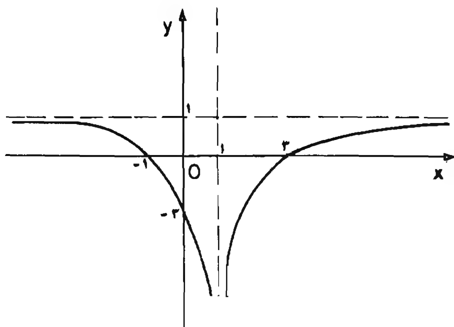
$$y=\frac{x^{۲}-۲x-۳}{x^{۲}-۲x+۱}$$

چون $\Delta=۰$ و $ab'-ba'=۰$ تابع ماکزیمم و می‌نیموم ندارد منحنی محور تقارن $x=۱$ دارد که مجانب آن است. می‌توان شکل تقریبی آن‌را بدون جدول تغییرات با استفاده‌از خطوط مجانب آن رسم نمود.

$$y'=\frac{۸}{(x-۱)^{۳}}$$

$$\begin{cases}x=۰\\ y=-۳\end{cases},\quad \begin{cases}x=-۱ \text{ یا } ۳\\ y=۰\end{cases},\quad \begin{cases}x\to\pm\infty\\ y=۱\end{cases},\quad \begin{cases}x\to ۱\\ y\to-\infty\end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		۳		$+\infty$
y'				$-$			|			$+$	
y	۱	↘	۰	↘	-۳	↘	$-\infty$ | $-\infty$	↗	۰	↗	۱



مثال۵- تعیین‌جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش:

$$y=\frac{x^{2}-۱۰}{x^{2}-۲x-۳}$$

چون $\Delta>۰$ و $R>۰$ و $ab'-ba'=-۲<۰$ پس تابع دارای یک می‌نیموم و یک ماکزیمم است و میتوان با استفاده از دومجانب قائم و مجانب افقی شکل آنرا پیش‌بینی کرد.

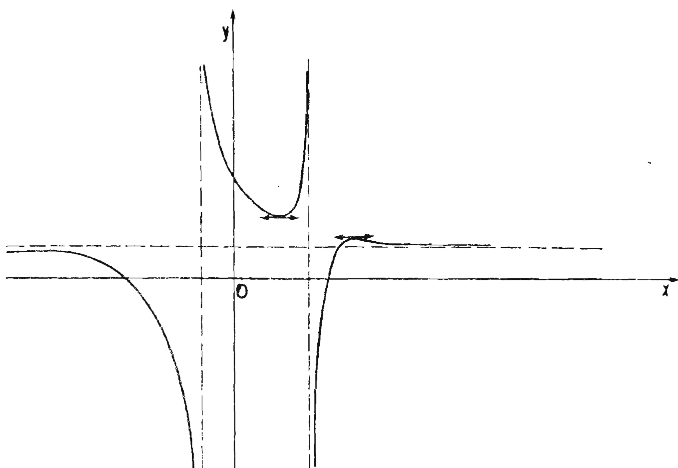
$$y'=\frac{-۲x^{۲}+۱۴x-۲۰}{V^{۲}} \qquad y'=۰\begin{cases}x=۲ \text{ و } ۵\\ y=۲ \text{ و } \frac{۵}{۴}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=۰\\ y=\frac{۱۰}{۳}\end{cases} \quad \begin{cases}x=\pm\sqrt{۱۰}\\ y=۰\end{cases} \quad \begin{cases}x\to\pm\infty\\ y=۱\end{cases}$$ مجانب

$$\begin{cases}x\to ۳ \text{ و } -۱\\ y\to\pm\infty\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x=۳\\ x=-۱\end{cases}$$ مجانب‌های قائم

تابع بازاء جمیع مقادیر x باستثناء ۳ و ۱ − معین و پیوسته است.

x	$-\infty$	$-\sqrt{۱۰}$	-۱	-۱	۰	۲	۳	۳	$\sqrt{۱۰}$	۵	$+\infty$
y'	−	−			−	۰		+	+	۰	−
y	۱ ↘	۰ ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	$\frac{۱۰}{۳}$ ↘	۲ ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗	۰ ↗	$\frac{۵}{۴}$ ↘	۱



مثال۶ـ تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش:

$$y=\frac{x^2+2|x|}{x^2+6x+5}$$

به ازاء $x\geqslant 0$ داریم $x=|x|$ و به ازاء $x<0$ داریم $|x|=-x$

پس باید تغییرات دو تابع زیر را بررسی کرد:

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{x^2+2x}{x^2+6x+5} \\ x>0 \end{cases} , \quad \begin{cases} y_2=\dfrac{x^2-2x}{x^2+6x+5} \\ x<0 \end{cases}$$

تابع y_1 همواره پیوسته است و مشتق آن مثبت است.

$$y_1'=\frac{4x^2+10x+10}{V^2}>0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y_1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\to+\infty \\ y=1 \end{cases}$$

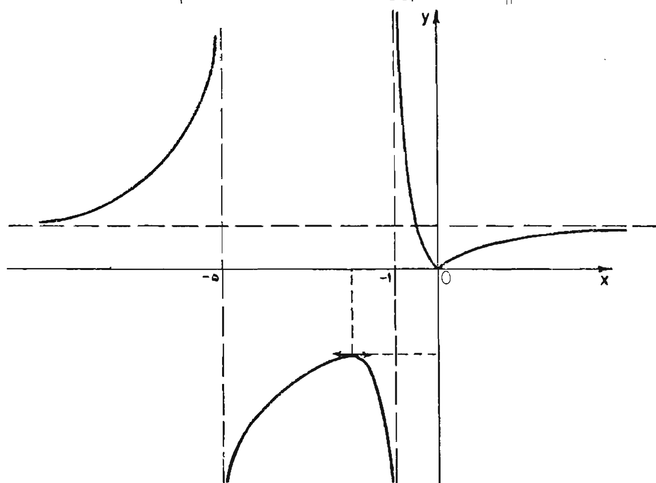
تابع y_2 در ازاء $x=-1$ و $x=-5$ نامعین و در ازای سایر مقادیر x معین و پیوسته است:

$$y_2' = \frac{8x^2+10x-10}{V^2} = 0 \Longrightarrow x = \frac{-5-\sqrt{105}}{8}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \to -1 \text{ و } -5 \\ y_2 \to \pm\infty \end{cases} \quad \begin{cases} x \to -\infty \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

تغییرات دو تابع رادر یك جدول خلاصه می‌کنیم:

x	$-\infty$		-5		$\frac{-5-\sqrt{105}}{2}$		-1		0		$+\infty$
y'		+	‖	+	0	−	‖	−	‖	+	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{8}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0 ‖ 0	↗	1



تابع درازای $x=0$ می‌نیمم است اما مشتق آن در ازاء $x=0$ نامعین‌است.

۲ ـ ۵ ـ بعضی از خواص تابع : $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ (درحالتی که لااقل a یا a' مخالف صفر باشد).

۱ـ هرگاه تابع فوق دارای یك ماکزیمم و یك می‌نیموم باشد و منحنی (c) نمایش تابع را با خط دلخواهی موازی محورxها قطع کنیم تا منحنی‌را در دو نقطه M و N قطع

کند. تصویر M و N و تصاویر نقاط C و D، ماکزیمم و می‌نیموم تابع، روی محورxها تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

زیرا هرگاه خط Δ موازی محورxهاو به معادلهٔ $y=m$ باشد از حل دستگاه دو معادلهٔ:

$$\begin{cases} y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \\ y=m \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$(ma'-a)x^2+(mb'-b)x+(mc'-c)=0 \quad (I)$$

x' و x'' طول نقاط M و N ریشه‌های معادلهٔ (I) می‌باشند.

از y مشتق می‌گیریم:

$$y'=\frac{(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+(bc'-cb')}{V^2}$$

صورت آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+(bc'-cb')=0 \quad (II)$$

x_1 و x_2 طول نقاط ماکسزیمم و می‌نیموم ریشه‌های معادلهٔ (II) می‌باشند حال اگر M_1 و N_1 و C_1 و D_1 به‌ترتیب‌تصاویر نقاط M و N و C و D روی محورxهاباشند داریم:

$$D_1(x_2,0) \text{ و } C_1(x_1,0) \text{ و } N_1(x'',0) \text{ و } M_1(x',0)$$

برای اینکه ثابت کنیم چهار نقطهٔ اخیر تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند باید ثابت‌کنیم:

$$2(x_1x_2+x'x'')=(x_1+x_2)(x'+x'')$$

اما با استفاده از معادله‌های I و II داریم:

$$x_1x_2=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'} \text{ و } x_1+x_2=-\frac{2(ac'-ca')}{ab'-ba'}$$

$$x'x''=\frac{mc'-c}{ma'-a} \text{ و } x'+x''=-\frac{mb'-b}{ma'-a}$$

$$2\left(\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}+\frac{mc'-c}{ma'-a}\right)=2\left(\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}\times\frac{mb'-b}{ma'-a}\right)$$

ویا $(bc'-cb')(ma'-a)+(ab'-ba')(mc'-c)=(ac'-ca')(mb'-b)$

پس از اختصار مشاهده می‌شود که مقادیر دوطرف تساوی باهم برابرند.

۲ـهرگاه‌منحنی(C) را با خط $y=m$ موازی محورxها قطع کنیم همواره بینx' وx'' طول نقاط برخورد خط و منحنی رابطهٔ مستقلی از m به صورت زیر برقرار است:

$$(ab'-ba')x'x''+(ac'-ca')(x'+x'')+bc'-cb'=0 \qquad (III)$$

زیرا با توجه به معادلهٔ I داریم:

$$x'+x''=-\frac{mb'-b}{ma'-a} \quad \text{و} \quad x'x''=\frac{mc'-c}{ma'-a}$$

اگر m را بین این دو رابطه حذف کنیم رابطهٔ مورد نظر بدست می‌آید.

چنانکه مشاهده می‌شود هرگاه $x''=x'$ باشد یعنی خط $y=m$ برمنحنی مماس باشد معادلهٔ (III) همان معادلهٔ $\circ=y'$ است و x های حاصل طول نقاط ماکزیمم و می‌نیموم است:

$$(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+(bc'-cb')=0$$

بنابراین نگاهداشتن فرمول III درذهن کار آسانی است.

۲-۶ - تعیین عرضهای ماکزیمم ومی‌نیموم تابع بدون استفاده از مشتق

چنانکه در بالا دیدیم معادلهٔ

$$(ma'-a)x^2+(mb'-b)x+(mc'-c)=0 \quad (I)$$

طول‌های نقاط برخورد خط $y=m$ ومنحنی (C) را می‌دهد حال هرگاه Δ_1 مبین این معادله مثبت باشد معادله دوجواب ودر نتیجه خط منحنی را در دونقطهٔ متمایز قطع می‌کند.

هرگاه Δ_1 مبین معادله را صفر قراردهیم،معادله(I) دارای ریشهٔ مضاعف بوده وخط برمنحنی مماس است. یعنی ریشه‌های معادله

$$\Delta_1 \equiv (mb'-b)^2-4(ma'-a)(mc'-c)=0 \quad (11)$$

که برحسب m از درجهٔ دوم است عرض‌های نقاط ماکزیمم ومی‌نیموم می‌باشند. البته بایدتوجه داشت که این ریشه ضریب x^2 را در معادلهٔ (I) صفر نکند، زیرا درآن حالت معادله (I) به یك معادلهٔ درجهٔ یك تبدیل می‌شود و مبین معنی ندارد.

طولهای نقطه‌های ماکزیمم ومی‌نیموم عبارتست از: $x=\frac{-(mb'-b)}{2(ma'-a)}$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (I) که درآن به‌جای m بـه ترتیب مقادیر y_1 و y_2 ریشه‌های معادلهٔ (11) را قرار می‌دهیم.

تبصره- درموقع محاسبهٔ عرض ماکزیمم و می‌نیموم تـابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ می‌توان ریشه‌های مشتق را به‌جای اینکه درکسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ قراردهیم درکسر $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (به‌شرط اینکه $g(x)$ و $g'(x)$ به ازای آن‌مقدار صفر نباشد) قراردهیم زیرا:

$$y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

طول ماکزیمم و می‌نیموم ریشه‌های صورت مشتق است یعنی:

$$f'(x)\cdot g(x)=g'(x)\cdot f(x)$$

چون $g(x)$ و $g'(x)$ صفر نیست طرفین را بر $g(x)\cdot g'(x)$ تقسیم می‌کنیم تا نتیجه شود:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

از تبصرهٔ فوق بیشتر درمواردی که ریشه‌های مشتق عدد کنگ است استفاده می‌شود که محاسبه آسانتر انجام شود.

تمرین

مطلوبست تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش هریك از توابع باضابطه‌های ذیل:

(۱) $y=\frac{2x}{x^2+1}$

(۲) $y=\frac{x^2-1}{x^2+x+1}$

(۳) $y=\frac{x^2-1}{5x^2-4x}$

(۴) $y=\frac{x^2-1}{(x-2)^2}$

(۵) $y=\frac{2x-4}{(x-1)^2}$

(۶) $y=\frac{2x^2+8x+7}{x^2+4x+3}$

(۷) $y=\frac{(x+1)^2}{3x(x-1)}$

(۸) $y=\frac{4x^2-3x+2}{3(x^2-1)}$

(۹) $y=\frac{3(x-1)^2}{2x(x-3)}$

(۱۰) $y=\frac{x^2-2x}{x^2-2x-3}$

(۱۱) $y=\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}$

(۱۲) $y=\frac{2x^2-5x+2}{2(x-1)^2}$

(۱۳) $y=\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}$

(۱۴) $y=\frac{-6x+6}{x^2+3}$

(۱۵) $y=\frac{x^2+7x+10}{x^2-3x}$

(۱۶) $y=\frac{x^2+2|x-1|+5}{x^2-2x-3}$

(۱۷) $y=\frac{|x^2-4x|}{x^2-4x+3}$

۱۸ـ تابع باضابطه $y=\frac{x^2-2ax+1}{x^2-2bx+1}$ که در آن $a\neq b$ است مفروض است:

الف ـ چه رابطه ای بین a و b برقرار باشد تا $M+m=0$ (M ماکزیمم و m می‌نیموم تابع است).

ب ــ به فرض $a=5$ و $M+m=0$ جدول تغییرات تابع را پس از تعیین پارامترها تعیین ومنحنی آنرا رسم کنید.

۱۹ ــ مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x}$ ضمناً معادلهٔ خطی که ماکزیمم را به مینیموم می‌پیوندد بنویسید.

۲۰ ــ تابع $y=\dfrac{x}{x^2-5x+4}$ مفروض است.

الف ــ منحنی نمایش آنرا رسم کنید.

ب ــ اگر A و B دو نقطه از منحنی باشند که مماس در آنها موازی محور xها باشد و A و B را بهم بپیوندیم تا خط حاصل منحنی را در نقطهٔ دیگری مانند C قطع کند. مطلوبست مختصات نقطهٔ C.

ج ــ معادلهٔ مماس در C را بنویسید. اگر خط اخیر منحنی را در D قطع کند مختصات نقطه D را نیز بنویسید.

۲۱ ــ اولاً مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی (C) نمایش تابع:

$$y=\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

ثانیاً اگر L نقطه برخورد منحنی (C) بامجانب آن باشد معادلهٔ خطوطی را که با ضریب زاویه‌ای m می‌باشند و از L گذشته‌اند بنویسید هرگاه M_1 و M_2 دو نقطهٔ دیگر برخورد خط مذکور بامنحنی (C) باشند حدود پارامتر m را چنان تعیین کنید که دو نقطه برخورد دیگر وجود داشته باشد. در حالت مخصوص که M_1 بر M_2 منطبق است مقادیر m را تعیین و مواضع M_1 یا M_2 را مشخص کنید.

۲۲ ــ تابع با ضابطه $y=\dfrac{x^2+ax}{x^2-4x+3}$ که درآن a پارامتر است مفروض است.

اولاً ــ برحسب مقادیر مختلف پارامتر a در اشکال مختلف منحنی بحث کنید.

ثانیاً ــ به ازاء $a=-2$ یا 0 یا -4 منحنی‌ها را دریك دستگاه مختصات رسم کنید.

ثالثاً ــ به ازای $a=-1$ و $a=-3$ منحنی‌ها به چه صورت درمی‌آیند.

۲۳ ــ اگرمنحنی (C) نمایش تابع $y=\dfrac{x}{x^2-5x+4}$ را در دستگاه مختصات عمود **برهم رسم کرده باشیم ومنحنی را باخط $y=m$ قطع کنیم تا نقاط M_1 و M_2 بدست آیند و هرگاه** P_1 و P_2 تصاویر آن نقاط روی $x'x$ **باشند؛**

الف ــ مختصات مرکز مستطیل $M_1M_2P_2P_1$ را بدست آورید.

ب ــ تحقیق کنید دایره‌های محیطی مستطیل متغیر $M_1M_2P_2P_1$ همواره بردایرهٔ ثابتی که مرکز وشعاع آنرا خواهید یافت عمودند.

۲۴ــ هرگاه تابع $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ دارای دو مجانب قائم D_1 و D_2 و همچنین یک ماکزیمم ویک می‌نیموم مانند A و B باشد ، تحقیق کنید پاره خط AB بوسیلهٔ D_1 و D_2 به نسبت توافقی تقسیم می‌شود.

۲۵ــ تابع $y=\frac{x^2+\lambda x+1}{x^2+x-\lambda}$ مفروض است. هرگاه منحنی (C) نمایش تابع مجانب افقی‌اش را در L قطع کند؛

اولاً ــ تحقیق کنید اگر تابع فوق دارای مرکز تقارن باشد مرکز تقارن همان L است.

ثانیاً ــ پارامتر λ راچنان تعیین کنید که تابع فوق دارای مرکز تقارن باشد و به ازاء مقدار حاصل λ منحنی (C) را رسم کنید.

۲۶ــ اولاً ــ مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی T نمایش تابع:

$$y=\frac{x^2-12x+27}{x^2-4x+5}$$

ثانیاً ــ اگر خطی به عرض m موازی محورxها منحنی Γ را در M و M' قطع کند و P و P' به‌ترتیب تصاویر قائم M و M' روی محورxها باشند و I مرکز مستطیل $MM'P'P$ فرض شود مختصات نقطهٔ I را برحسب m تعیین کنید و معادلهٔ E مکان هندسی I را بنویسیدو منحنی E رادرهمان دستگاه مختصات رسم کنید.

۲۷ــ اولاً تغییرات تابع $y=\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}$ را تعیین و منحنی Γ نمایش آنرارسم کنید.

ثانیاً ــ اگر خط $y=\lambda$ موازی محورxها منحنی Γ را در M و M' قطع کند مختصات P وسط MM' را برحسب پارامتر λ بنویسید معادلهٔ E مکان هندسی نقاط P را نیز تعیین کنید و منحنی E را درهمان دستگاه مختصات رسم کنید.

۲۸ــ تابع $y=\frac{2x(x-m)}{x^2+x-6}$ مفروض است.

۱) حدود m راچنان تعیین کنید که تابع فوق دارای ماکزیمم ومی‌نیمم باشد.

۲) به ازاء $m=0$ منحنی Γ نمایش تابع را رسم کنید.

۳) هرخط غیرمشخص D که ازمبدأ مختصات بگذرد منحنی Γ را معمولاً در دو نقطهٔ دیگر M و M' قطع می‌کند. اگر P وسط قطعهٔ خط MM' باشد نشان دهید که مجموعهٔ E متشکل از

نقاط P قسمتی از نمودار تابع $y=\frac{2x}{1+2x}$ می‌باشد . منحنی E را در همان دستگاه مختصات رسم کنید.

تابعهای گنگ

۲ـ۷ تعریف ــ تابع $y=f(x)$ را گنگ گوییم درصورتی‌که عبارت $f(x)$ نسبت به x گنگ باشد .

تابعهای

$$y=1-\sqrt{x-2}\ ,\ y=\sqrt{-x^2+4x}\ ,$$

$$y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\ ,\ y=2x-1+\sqrt{x^2-1}\ ,$$

$$y=\sqrt{x^3-3x^2}$$

گنگ هستند

برای تعیین تغییرات یك تابع گنگ مانند سایر توابع عمل می‌کنیم:

الف ـ ابتدا فاصله‌هایی از متغیر x را که تابع در آنها معین و پیوسته است تعیین می‌کنیم.

ب ـ مشتق تابع را تعیین و ریشه‌های مشتق و علامت مشتق را معلوم نموده سپس بوسیله صعود و نزول و ماکزیمم و می‌نیموم تابع را معلوم می‌کنیم.

ج ـ اگر منحنی شاخهٔ بی‌نهایت داشته باشد معادلات خطوط مجانب آن را درصورت وجود تعیین می‌کنیم.

د ـ چند نقطهٔ دیگر ازجمله محل برخورد منحنی را بامحور yها و xها، در صورت وجود و امکان، تعیین می‌کنیم.

هـ ـ جدول تغییرات تابع را تنظیم و از روی آن منحنی نمایش تابع را رسم می‌کنیم.

توجه ـ در موقع تعیین ریشه‌های مشتق و یا ریشه‌های $y=0$، در صورتی‌که معادله گنگ باشد. باید توجه داشته باشید که ریشه‌های حاصل ریشهٔ خارجی نبوده ودر فاصله‌ای باشند که تابع معین است.

مثال ۱ـ تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع :

$$y=1-\sqrt{x-2}$$

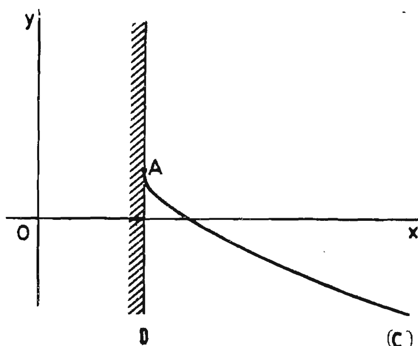
تابع به ازای مقادیر $x\geqslant 2$ معین وپیوسته است.

$$y'=\frac{-1}{2\sqrt{x-2}}<0 \quad \text{و}\ x>2$$

$$\begin{cases}x\to+\infty\\ y\to-\infty\end{cases}\qquad \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\qquad \begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases}$$

x	۲	↗	۳	↗	$+\infty$
y'	$-\infty$	−		−	
y	۱	↘	۰	↘	$-\infty$

منحنی مجانب ندارد



منحنی درنقطه A برخط D مماس است.

مثال۲- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع:

$$y=(x+۲)\sqrt{\frac{x}{-x+۲}}$$

تابع در فاصلهٔ $۰<x<۲$ معین و پیوسته است.

$$y'=\frac{-x^{۲}+۳x+۴}{(-x+۲)^{۲}\sqrt{\frac{x}{-x+۲}}}$$

ریشه‌های مشتق ۱ — و ۴ است که چون در فاصلهٔ]۲ و ۰[نیست غیر قابل قبول است.

$$\begin{cases}x=۰\\ y=۰\end{cases}\quad،\quad\begin{cases}x\to ۲\\ y\to +\infty\end{cases}$$

x	۰	↗	۱	↗	۲
y'	∞		+		
y	۰	↗	۵	↗	$+\infty$

خط $x=۲$ مجانب قائم منحنی است.

منحنی در مبدأ مختصات بر محور yها مماس است.



مثال۳- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع: $y=۲-\sqrt{\frac{x-۲}{x+۱}}$

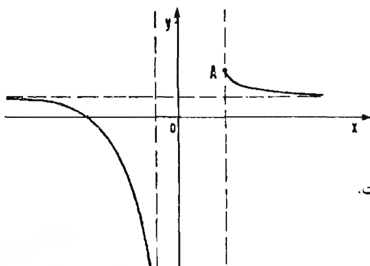
برای اینکه تابع معین باشد باید $\frac{x-۲}{x+۱}\geq ۰$ یعنی $x>۲$ یا $x<-۱$. مشتق تابع پس از ساده کردن برابر است با:

$$y'=\frac{-۳}{۲(x+۱)^۲\sqrt{\frac{x-۲}{x+۱}}}$$

$$\begin{cases}x=۲\\ y=۲\end{cases},\quad \begin{cases}x=-۴\\ y=۰\end{cases},\quad \begin{cases}x\to\pm\infty\\ y\to ۱\end{cases},\quad \begin{cases}x\to -۱\\ y\to -\infty\end{cases}$$

x	$-\infty$	↗	-۴	↗	-۱		۲	↗	$+\infty$
y'		$-$			$-\infty$		$-\infty$	$-$	
y	۱	↘	۰	↘	$-\infty$		۲	↘	۱

خط $x=-۱$ محانب قائم و خط $y=۱$ مجانب افقی منحنی است.



منحنی، در A بر خط $x=۲$ مماس است.

مثال۴- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع :

$$y = x - ۲ - \sqrt{x - ۴}$$

تابع به‌ازای $x > ۴$ معین پیوسته است. مشتق تابع عبارتست از:

$$y' = ۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x-۴}} = \frac{۲\sqrt{x-۴} - ۱}{۲\sqrt{x-۴}}$$

و

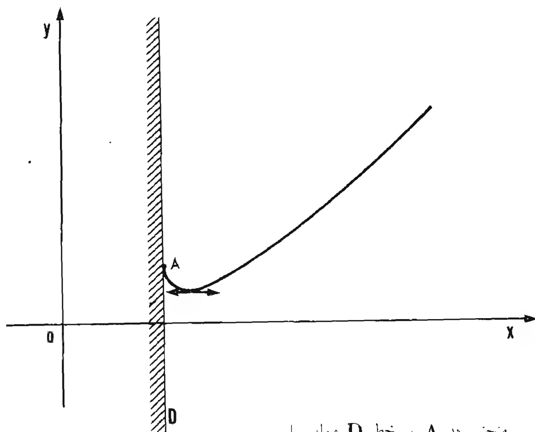
$$y' = ۰ : \begin{cases} x = \frac{۱۷}{۴} \\ y = \frac{۷}{۴} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = ۴ \\ y = ۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} x \to +\infty \\ y \to +\infty \end{cases}$$

$$x - ۲ - \sqrt{x - ۴} = ۰$$

$$x^۲ - ۵x + ۸ = ۰$$

این معادله ریشه ندارد پس منحنی محورxها را قطع نمی‌کند.

x	۴	↗	$\frac{۱۷}{۴}$	↗	∞
y'	∞	−	۰	+	
y	۲	↘	$\frac{۷}{۴}$	↗	$+\infty$



منحنی در A بر خط D مماس است.

۲-۸ - بررسی تغییرات تابعهای:

$$(۱) \qquad y = ax + b + \sqrt{cx^2 + dx + e}$$

$$(۲) \qquad y = ax + b - \sqrt{cx^2 + dx + e}$$

برای تعیین تغییرات تابعهای فوق مانند سایر توابع گنگ که در مقدمهٔ این بخش ذکر کردیم عمل می‌کنیم و منحنی نمایش آنها را با استفاده از جدول تغییرات آنها رسم می‌کنیم منتهی‌چون منحنی‌نمایش هریك از تابعهای فوق یکی از مقاطع مخروطی است توضیح بیشتری دربارهٔ آنها می‌دهیم وسپس به‌ذکر چند مثال می‌پردازیم:

برحسب‌آنکه $\Delta = d^2 - 4ce$ وهمچنین ضریب c مثبت، منفی یا صفر باشد جدول زیر را داریم:

الف: $c < 0$

- $\Delta < 0$: عبارت زیر هریك از رادیکالها همواره منفی است و تابعهای (۱) و (۲) همواره‌نـامعین‌اند و نموداری ندارند.
- $\Delta = 0$: عبارت زیر رادیکال به‌ازای‌جمیع مقادیر x به استثناء $x_0 = -\frac{d}{2c}$ همواره منفی است و در نتیجه تابع نامعین است و نمودار آن فقط نقطهٔ $A(x_0 , ax_0 + b)$ می‌باشد.
- $\Delta > 0$: **عبارت زیر رادیکال دارای دو ریشهٔ x_1وx_2 است ، $x_1 < x_2$ ، وتابعها درفاصلهٔ $[x_1 و x_2]$ معین وپیوسته‌اند ونمودار آنها شاخهٔ بی‌نهایت ندارد ونیمی از بیضی (یادرحالت خاص دایره)است.**

ب: $c = 0$

- $d = 0$:
  - $e \geq 0$: نمودار هریك‌از دوتابع خط مستقیم است.
  - $e < 0$: هریك‌از دوتابع همواره نامعین است ونمودار ندارد.
- $d > 0$: هریك ازدوتابع به ازای $x \geq -\frac{e}{d}$ معین وپیوسته‌است‌ونمودارهریك **یك شاخهٔ‌بی‌نهایت دارد ولی دارای مجانب نیست (نیمی‌از سهمی)**
- $d < 0$: هریك از دوتابع بـه ازای $x \leq -\frac{e}{d}$ معین و پیوسته است ونمودار **هریك یك‌شاخهٔ‌بی‌نهایت‌داردولی دارای‌مجانب‌نیست (نیمی‌ازسهمی)**

- $\Delta < 0$: عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است وهریك ازدو تـابع همواره معین وپیوسته است. هـر منحنی دارای شاخهٔ بی‌نهایت است و دو **مجانب دارد (نیمی‌از هذلولی)**

ج: $c>0$ $\left\{\begin{array}{l} \Delta=0 \\ \\ \Delta>0 \end{array}\right.$

$\Delta=0$: عبارت زیر رادیکال مجذور کامل است ونمودار هریک از دو تابع خطی شکسته است.

$\Delta>0$: عبارت‌زیر رادیکال‌دارای‌ریشه‌های x_1 و x_2 بوده ودر فاصلهٔ $[x_1, +\infty[$ و $]-\infty\ ,\ x_2]$ مثبت وهریك از دوتابع در فاصله‌های مذکورمعین و پیوسته و منحنی نمایش هریك از دو تابع دارای شاخهٔ بی‌نهایت است و دومجانب دارد (نیمی ازهذلولی)

بطور خلاصه اگر $c<0$ معمولا منحنی نیمی از بیضی‌است وا گر $c=0$ منحنی‌نیمی‌ازسهمی است وا گر $c>0$ منحنی معمولا نیمی‌از هذلولی است.

یادآوری- درحالت $c>0$ هرگاه تابعهای (۱) و (۲) را به‌صورت:

$$(۱)\quad y=ax+b+\sqrt{(px+q)^2+1}$$

$$(۲)\quad y=ax+b-\sqrt{(px+q)^2+1}$$

که درآن $p>0$ درآوریم دربخش مربوط به مجانب دیدیم هریك ازدوتابع دارای دومجانب به‌معادله‌های زیر می‌باشد :

تابع (۱) دارای مجانبهای:

$$\begin{cases} y_1=ax+b+(px+q) \\ x\to+\infty \end{cases} \text{ و } \begin{cases} y_2=ax+b-(px+q) \\ x\to-\infty \end{cases}$$

تابع (۲) دارای مجانبهای :

$$\begin{cases} y_1=ax+b+(px+q) \\ x\to-\infty \end{cases} \text{ و } \begin{cases} y_2=ax+b-(px+q) \\ x\to+\infty \end{cases}$$

مثال۱- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع :

$$y=3-\sqrt{-x^2+4}$$

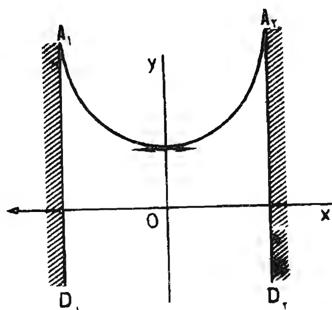
باید $-x^2+4>0$ یا $-2<x<2$ باشد تا تابع معین باشد.

$$y'=\frac{2x}{2\sqrt{-x^2+4}}\ ,\ y'=0:\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$$

x	۲−	↗	۰	↗	۲
y'	∞	−	۰	+	∞
y	۳	↘	۱	↗	۳

معادلهٔ $y=0$ ریشه ندارد.



نمودار فوق نیمدایره است که در A_1 و A_2 بر D_1 و D_2 مماس است.

مثال۲- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع:

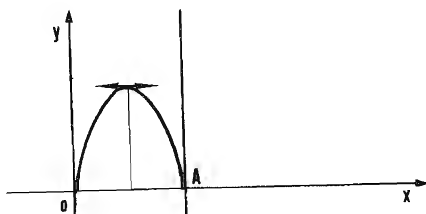
$$y=\sqrt{-۴x^۲+۸x}$$

باید $-۴x^۲+۸x\geqslant ۰$ یعنی x باید در فاصلهٔ $[۰,۲]$ باشد تا تابع معین باشد:

$$y'=\frac{-۴x+۴}{\sqrt{-۴x^۲+۸x}}$$

$$y'=۰: \begin{cases}x=۱\\y=۲\end{cases} \quad \begin{cases}x=۰\\y=۰\end{cases} \quad \begin{cases}x=۲\\y=۰\end{cases}$$

x	۰	↗	۱	↗	۲
y'	∞	+	۰	−	∞
y	۰	↗	۲	↘	۰



منحنی نیم بیضی است و در O بر محورyها و در A برخط $x=۲$ مماس است.

مثال۳- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع:

$$y=x-2+\sqrt{-x^2+4x}$$

تابع به‌ازای مقادیر فاصلهٔ [۴, ۰] معین و پیوسته است. مشتق پس از ساده‌کردن می‌شود:

$$y'=\frac{-x+2+\sqrt{-x^2+4x}}{\sqrt{-x^2+4x}}$$

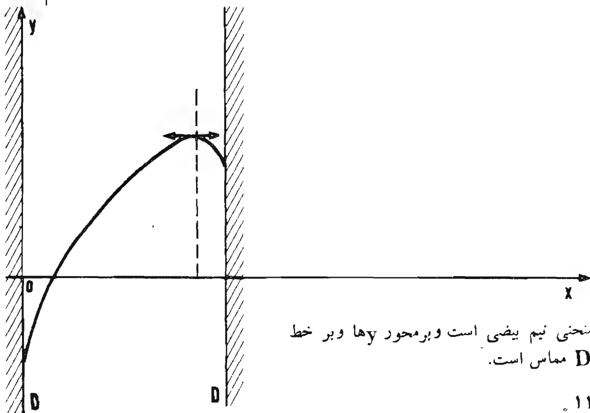
معادلهٔ $y'=0$ یعنی $-x+2+\sqrt{-x^2+4x}=0$ دوریشهٔ $2+\sqrt{2}$ و $2-\sqrt{2}$ دارد که درآن $2-\sqrt{2}$ ریشهٔ خارجی است و ریشهٔ مشتق تنها عدد $2+\sqrt{2}$ است.

از معادلهٔ $y=0$ برای x دوعدد $2+\sqrt{2}$ و $2-\sqrt{2}$ بدست می‌آید که‌درآن $2+\sqrt{2}$ خارجی و ریشهٔ واقعی معادله $2-\sqrt{2}$ است. بنا براین داریم:

$$y'=0:\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\\ y=2\sqrt{2}\end{cases}\quad\begin{cases}x=0\\ y=-2\end{cases}\quad\begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}\quad\begin{cases}x=2-\sqrt{2}\\ y=0\end{cases}$$

برای تعیین علامت مشتق درهرفاصله عددی راکه ریشهٔ مشتق نباشد در مشتق قراردهید تاعلامت مشتق به ازای آن معلوم شود.

x	0	↗	$2-\sqrt{2}$	↗	$2+\sqrt{2}$	↗	4
y'	∞		+		0	$-$	∞
y	-2	↗	0	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2



منحنی نیم بیضی است وبرمحور yها وبر خط D مماس است.

مثال۴- تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی تابع :

$$y=x+1+\sqrt{x+3}$$

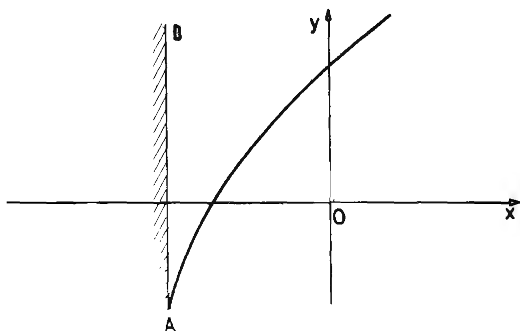
تابع به‌ازای $x \geqslant -3$ معین و پیوسته است:

$$y'=1+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}>0$$

از معادلهٔ $y=0$ بدست می‌آید $x=1$ و $x=-2$ که $x=1$ ریشه خارجی معادله است پس ریشهٔ $y=0$ همان -2 است.

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1+\sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\to+\infty \\ y\to+\infty \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$$

x	-3 ↗	-2	↗	0	↗	$+\infty$	
y'			+				
y	-2 ↗	0	↗	$\sqrt{3}+1$	↗	$+\infty$	



منحنی فوق نیم سهمی است و در A برخط D مماس است.

مثال۵- تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع:

$$y=2-\sqrt{x^2+2x+4}$$

چون $x^۲+۲x+۴$ ریشه‌ندارد یعنی $\Delta<۰$ ، تابع همواره معین و پیوسته است.

$$y'=\frac{-۲x-۲}{۲\sqrt{x^۲+۲x+۴}} \ ،\ y'=۰ : \begin{cases} x=-۱ \\ y=۲-\sqrt{۳} \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ $y=۰$ عبارتست از $x=۰$ و $x=-۲$ که هردو قابل قبولند.

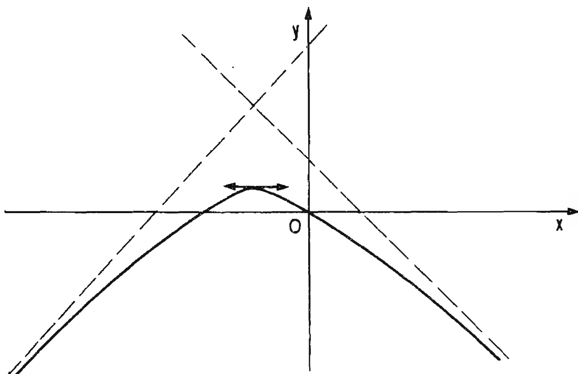
$$\begin{cases} x=-۲ \text{ یا } ۰ \\ y=۰ \end{cases} \quad \begin{cases} x\to+\infty \\ y\to-\infty \end{cases} \quad \begin{cases} x\to-\infty \\ y\to-\infty \end{cases}$$

برای تعیین مجانبها می‌نویسیم: $y=۲-\sqrt{(x+۱)^۲+۳}$ پس مجانبها عبارتند از:

$$\begin{cases} Y_۲=۲-(x+۱) \\ x\to+\infty \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} Y_۱=۲+(x+۱) \\ x\to-\infty \end{cases}$$

یا : $Y_۱=x+۳$ و $Y_۲=-x+۱$

x	$-\infty$	↗	-۲	↗	-۱	↗	۰	↗	$+\infty$
y'			+		۰		−		
y	$-\infty$	↗	۰	↗	$۲-\sqrt{۳}$	↘	۰	↘	$-\infty$



منحنی به هذلولی است.

مثال۶- تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی تابع با ضابطهٔ

$$y=x+1+\sqrt{x^2+4x-5}$$

تابع به‌ازاء $x^2+4x-5\geqslant 0$ یعنی به‌ازاء $x\leqslant -5$ یا $x\geqslant 1$ معین و پیوسته است. مشتق پس از ساده کردن می‌شود:

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+4x-5}+x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}$$

معادلهٔ $y'=0$ ریشه ندارد.

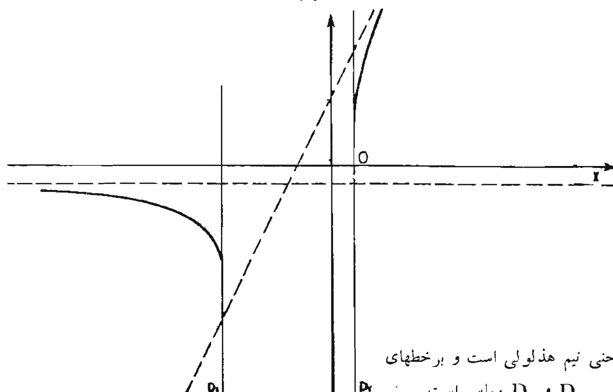
$$\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases},\quad \begin{cases}x=-5\\ y=-4\end{cases},\quad \begin{cases}x\to-\infty\\ y\to-\infty+\infty=-1\end{cases},\quad \begin{cases}x\to+\infty\\ y\to+\infty\end{cases}$$

هرگاه بنویسیم $y=x+1+\sqrt{(x+2)^2-9}$ مجانبها عبارتند از:

$$Y=x+1\pm(x+2)$$

یا: $Y=-1$ و $Y=2x+3$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
y'		$-$				$+$	
y	-1	↘	-4		2	↗	$+\infty$



منحنی نیم هذلولی است و برخطهای D_1 و D_2 مماس است.

تمرین

الف ـ مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش هریك از تابعهای زیر:

۱) $y=\sqrt{x+2}$ ۲) $y=\sqrt{-x+4}$

۳) $y=2-\sqrt{x-3}$ ۴) $y=\sqrt{1-x}$

۵) $y=\sqrt{2-|x|}$ ۶) $y=x-\sqrt{x}$

۷) $y=x+\sqrt{x}$ ۸) $y=\sqrt{-x^2+4x}$

۹) $y=\sqrt{-x^2-x+2}$ ۱۰) $y=\sqrt{-2x^2+16x-30}$

۱۱) $y=1+\sqrt{-x^2+4x}$ ۱۲) $y=1-\sqrt{-4x^2+9}$

۱۳) $y=\sqrt{-x^2+6x}+x$ ۱۴) $y=x-\sqrt{-x^2+6x}$

۱۵) $y=\sqrt{x^2-4x+9}$ ۱۶) $y=\sqrt{x^2-4x-5}$

۱۷) $y=x-\sqrt{x^2-2x}$ ۱۸) $y=x+1+\sqrt{x^2+4x+}$[illegible]

۱۹) $y=5(x+4)+2\sqrt{x(x+8)}$ ۲۰) $y=\sqrt{x^2+2|x|}$

ب ـ جدول تغییرات هریك از دوتابع y_1 و y_2 را نوشته و منحنی نمایش‌آنها را دریك دستگاه مختصات قائم رسم کنید:

۲۱) $y_1=x+\sqrt{-x^2+8}$ و $y_2=x-\sqrt{-x^2+8}$

۲۲) $y_1=\frac{1}{2}(x+3+\sqrt{-3x^2+6x+9})$ و

$$y_2=\frac{1}{2}(x+3-\sqrt{-x^2+6x+9}$$

۲۳) $y_1=x+1+\sqrt{x^2+1}$ و $y_2=x+1-\sqrt{x^2+1}$

ج ـ به‌ازاء مقادیر مختلف λ در اشکال مختلف منحنیهای نمایش هریك از تابعهای زیر بحث کنید:

۲۴) $y=\sqrt{\lambda x^2-(\lambda+1)}$ ۲۵) $y=\sqrt{(x+1)^2+\lambda x}$

د ـ مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش هریك از تابعهای زیر:

۲۶) $y=2x\sqrt{1-x^2}$ ۲۷) $y=(4x^2-1)\sqrt{1-x^2}$

$$۲۸)\quad y=\frac{۸}{\sqrt{۹-x^۲}}$$

$$۲۹)\quad y=\sqrt{\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}}$$

$$۳۰)\quad y=\sqrt{\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}}$$

$$۳۱)\quad y=x\sqrt{\frac{x}{۱-x}}$$

$$۳۲)\quad y=x\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}$$

$$۳۳)\quad y=\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۱-x^۲}}{۲}}$$

$$۳۴)\quad y=\sqrt{\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{۲}}$$

تابعهای مثلثاتی

۲-۹ - تعریف - تابع مثلثاتی تابعی ازمتغیرحقیقی x است که‌در آن خطوط مثلثاتی قوس x یا خطوط مثلثاتی‌قوسهای $\frac{p}{q}x$ (p و q اعدادی درست‌اند و $q\neq ۰$) بکار رفته باشد. مثل:

$f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ و $f(x)=tg x$ و $f(x)=\sin x+\cos x$

$f(x)=\sin\frac{x}{۲}-\cos\frac{x}{۲}$ و $f(x)=x+\sin x$ و $f(x)=x-\cos x$

$f(x)=tg x-cotg x$ و $f(x)=\sin ۲x+\cos ۲x-۱$

در این بخش بیشتر در مورد تابعهای مثلثاتی که در آن فقط خطوط مثلثاتی کمان x و یا $\frac{p}{q}x$ بکار رفته باشد مطالبی بیان می‌کنیم و از ذکر تابعهای مثلثاتی که در آن علاوه برخطوط مثلثاتی خود قوس x نیز بکار رفته باشد خودداری می‌کنیم.

۲-۱۰- تابع متناوب - تابع $y=f(x)$ را متناوب گوئیم در صورتی که عددی مانند $t\neq ۰$ وجود داشته باشد به قسمی که اولا اگر $x\in D_f$ آنوقت $x+t\in D_f$، ثانیاً رابطهٔ: $f(x)=f(x+t)$ برقرار باشد.

اگر یك کوچکترین t مثبت موجود باشد که در شرایط فوق صدق کند، آن t را معمولا با T نشان‌داده و دوره تناوب تابع f می‌نامیم.

مثال۱- تابع مثلثاتی $y=\sin x$ دارای دورهٔ تناوب $T=۲\pi$ می‌باشد زیرا می‌دانیم:

$$\sin x=\sin(x+۲k\pi)$$

که در آن k عددی درست است.

حال اگر $k=۱$ خواهیم داشت:

$$\sin x=\sin(x+۲\pi)$$

بنابراین کمترین مقدار مثبت $2k\pi$ مقدار 2π است پس $T = 2\pi$.

مثال۲- تابع مثلثاتی $y = \cos x$ دارای دورهٔ تناوب $T = 2\pi$ می‌باشد. زیرا: $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ و درنتیجه بازای $k = 1$ داریم: $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ و کمترین مقدار مثبت $2k\pi$ در ازای $k = 1$ حاصل می‌شود. پس $T = 2\pi$ می‌باشد.

مثال۳- دورهٔ تناوب تابع $y = tg x$ برابر $T = \pi$ می‌باشد زیرا داریم:

$$tg x = tg(x + k\pi)$$

ودر ازاء $k = 1$ کمترین مقدار مثبت $k\pi$ حاصل می‌شود.

مثال۴- دورهٔ تناوب $y = cotg x$ برابر $T = \pi$ است زیرا داریم:

$$cotg x = cotg(x + k\pi)$$

وکمترین مقدار مثبت $k\pi$ در ازاء $k = 1$ بدست می‌آید.

مثال ۵ — دورهٔ تناوب تابعهای $y = \sin\frac{a}{b}x$ و $y = \cos\frac{a}{b}x$، $a \neq 0$، $b \neq 0$، عبارتست از:

$$T = 2\pi \;:\; \frac{a}{b} = \frac{2\pi b}{a}$$

زیرا داریم:

$$\sin\left[\frac{a}{b}\left(x + \frac{2k\pi b}{a}\right)\right] = \sin\left(\frac{a}{b}x + 2k\pi\right) = \sin\frac{a}{b}x$$

$$\cos\left[\frac{a}{b}\left(x + \frac{2k\pi b}{a}\right)\right] = \cos\left(\frac{a}{b}x + 2k\pi\right) = \cos\frac{a}{b}x$$

ودر ازاء $k = 1$ داریم:

$$T = \frac{2\pi b}{a}$$

مثال ۶— دوره تناوب تابعهای $y = tg\frac{a}{b}x$ و $y = cotg\frac{a}{b}x$، $a \neq 0$، $b \neq 0$، عبارتست از:

$$T = \pi \;:\; \frac{a}{b} = \frac{\pi b}{a}$$

زیرا:

$$tg\left[\frac{a}{b}\left(x + \frac{k\pi b}{a}\right)\right] = tg\left(\frac{a}{b}x + k\pi\right) = tg\frac{a}{b}x$$

$$cotg\left[\frac{a}{b}\left(x + \frac{k\pi b}{a}\right)\right] = cotg\left(\frac{a}{b}x + k\pi\right) = cotg\frac{a}{b}x$$

مثال ۷— برای تعین دورهٔ تناوب تابع $y = \sin 4x + \cos 6x$ داریم :

T_1 دورهٔ تناوب $\sin 4x$ عبارتست‌از : $T_1 = 2\pi : 4 = \frac{\pi}{2}$

T_2 دورهٔ تناوب $\cos 6x$ عبارتست از : $T_2 = 2\pi : 6 = \frac{\pi}{3}$

اگر T_1 و T_2 را متحدالمخرج کنیم می‌شود $T_1 = \frac{3\pi}{6}$ و $T_2 = \frac{2\pi}{6}$ و چون کوچکترین

مضرب مشترك ۳ و ۲ برابر ۶ است و داشتیم $T_1 = 3 \times \frac{\pi}{6}$ و $T_2 = 2 \times \frac{\pi}{6}$ پس $T = 6 \times \frac{\pi}{6}$

یعنی دورهٔ تناوب تابع فوق $T = \pi$ می باشد.

مثال ۸ـ تعیین دورهٔ تناوب تابع : $y = \sin\frac{2}{3}x + \cos\frac{1}{6}x$. دورهٔ تناوب تابع

$\cos\frac{1}{6}x$ برابر است با $T_1 = 2\pi : \frac{1}{6} = 12\pi$ و دورهٔ تناوب تابع $\sin\frac{2}{3}x$ برابر است با

$T_2 = 2\pi : \frac{2}{3} = 3\pi$. چون کوچکترین مضرب مشترك بین ۱۲ و ۳ عبارت است‌از ۱۲ پس

$T = 12 \times \pi = 12\pi$

۲-۱۱ـ تعیین تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع مثلثاتی متناوب

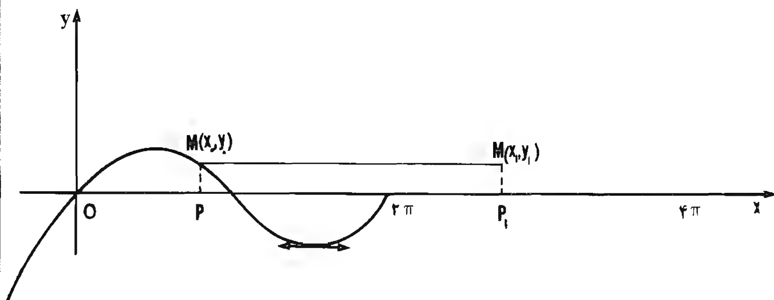
برای رسم منحنی (C) نمایش تابع مثلثاتی متناوب $y = f(x)$ ابتدا منحنی (C_0) نمایش تابع مذکور را بوسیله جدول تغییرات آن در یکی از فاصله‌های تناوب مثلاً $(a , a+T)$ رسم نموده سپس منحنی حاصل را به اندازهٔ بردار $\vec{V}$ موازی محورxها که اندازهٔ **جبری آن روی محورxها kT (k عددی درست است) می‌باشد انتقال می‌دهیم هرگاه به k اعداد درست بدهیم وعمل را ادامه دهیم منحنی (C) نمایش تابع رسم می‌شود.**

مثلا اگر (C_0) نمایش تابع $y = \sin x$ در فاصلهٔ $[0$ و $2\pi]$ (شکل بعد) و M_0 نقطه‌ای ازآن به مختصات $(x_0 , \sin x_0)$ باشد هرگاه نقطهٔ M_0 را به اندازهٔ بردار $\vec{V}$ موازی محور $x'x$ که اندازهٔ جبری‌آن $2k\pi$ (درشکل اندازهٔ جبری بردار $2k\pi$ را 2π اختیار کرده‌ایم) می‌باشد انتقال دهیم نقطهٔ $M_1(x_1 , y_1)$ بدست می‌آید.

داریم:

$$x_1 = x_0 + k \cdot 2\pi$$
$$y_1 = y_0 = \sin x_0 = \sin(x_0 + 2k\pi) = \sin x_1$$

وچون مختصات M_1 در معادلهٔ $y = \sin x$ صدق می‌کند پس M_1 متعلق به‌نمودار است.



توجه: واحد اندازه‌گیری کمان x را روی محور xها همیشه با رادیان تعیین کنید.

نکتهٔ مهم- در بررسی تغییرات تابعهای مثلثاتی شامل تانژانت یا کتانژانت باید مقادیر متغیر را که درازای آن $y \to +\infty$ یا $y \to -\infty$ نیز تعیین کرد. همچنین باید توجه کرد که این گونه تابعها معمولاً مجانب قائم دارند و باید معادله‌های آنها را بدست آورد. مثلا در تابع $y = a\,tg\,px + b$ هرگاه $x \to \frac{k\pi}{p} + \frac{\pi}{2p}$ داریم $y \to \pm\infty$ و خطهای به معادلهٔ $x = \frac{k\pi}{p} + \frac{\pi}{2p}$ مجانبهای قائم منحنی تابع می‌باشند.

مثال ۱- تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع $y = 2\sin^2 x - 5\sin x + 2$ در فاصلهٔ [۲π و ۰]

تابع همواره معین و اتصالی است. مشتق آن می‌شود:

$$y' = 4\sin x \cos x - 5\cos x = \cos x(4\sin x - 5)$$

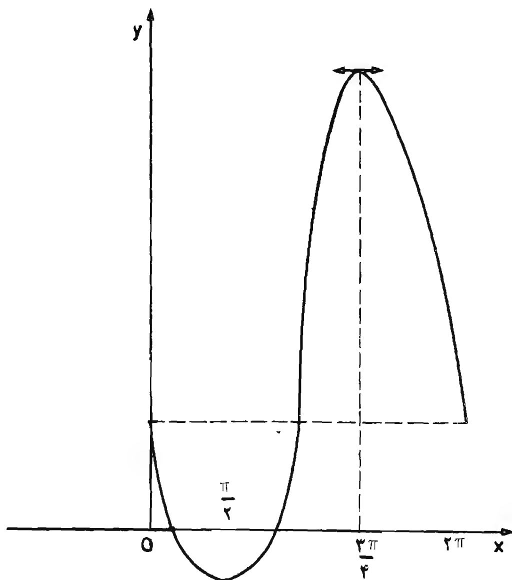
عامل $(4\sin x - 5)$ همواره منفی است، بنابراین علامت مشتق مخالف علامت $\cos x$ می‌باشد.

ریشه‌های $\cos x = 0$ عبارتست از: $\frac{\pi}{2}$ و $3\frac{\pi}{2}$

ریشه‌های قابل قبول $y = 0$ عبارتست از ریشه‌های $\sin x = \frac{1}{2}$

$$y' = 0 : \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \text{ یا } x = 3\frac{\pi}{2} \\ y = -1 \text{ و } y = 9 \end{cases} ، \begin{cases} x = 0 \text{ یا } 2\pi \\ y = 2 \end{cases} ، \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{5\pi}{6} \\ y = 0 \end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y′			−		0		+		0	−	
y	2	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	9	↘	2



مثال۲ـ تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع: $y=\frac{1-\sin x}{2\sin x-1}$ در فاصلهٔ $[-\pi , \pi]$

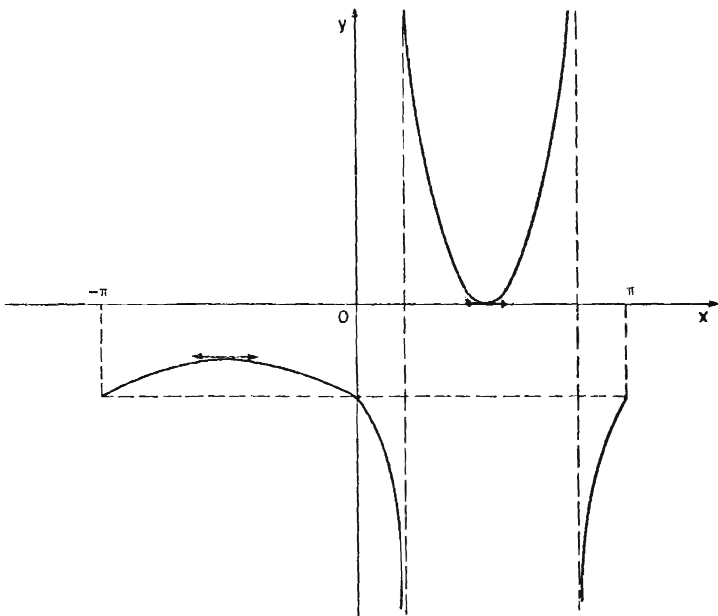
دورهٔ تناوب‌تابع 2π است. تابع به‌ازای ریشه‌های $\sin x=\frac{1}{2}$ انفصالی‌است بنابراین: $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{5\pi}{6}$ مجانبهای قائم منحنی می‌باشند.

تابع دراین‌فاصله‌به‌ازای مقادیر $x\neq\frac{\pi}{6}$ و $x\neq\frac{5\pi}{6}$ معین و پیوسته است:

$$y'=\frac{-\cos x}{(2\sin x-1)^2} \quad ، \quad y'=0 : \begin{cases} x=\frac{\pi}{2} \text{ یا } x=-\frac{\pi}{2} \\ y=0 \text{ و } y=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$\begin{cases} x = \pi \text{ یا } -\pi \\ y = -۱ \end{cases}$ $\begin{cases} x \to \frac{\pi}{۶} \text{ یا } \frac{۵\pi}{۶} \\ y \to \pm\infty \end{cases}$ $\begin{cases} x = ۰ \\ y = -۱ \end{cases}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{۲}$		۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۲}$		$\frac{۵\pi}{۶}$		π
y'		+	۰			− ‖		−	۰	+ ‖		+	
y	−۱	↗	$-\frac{۲}{۳}$	↘	−۱	↘ $-\infty$ ‖	$+\infty$	↘	۰	↗ $+\infty$ ‖	$-\infty$	↗	−۱



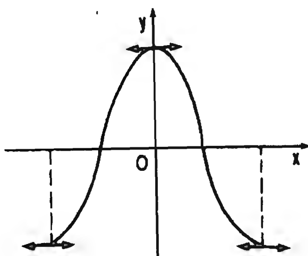
مثال۳- تعیین تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع $y = \cos \pi x$ درفاصلهٔ یکی از دوره‌های تناوب آن تابع فوق همواره معین و پیوسته است. دورهٔ تناوب آن $T = ۲\pi : \pi = ۲$ می‌باشد پس تغییرات تابع را مثلا درفاصلهٔ [۱ و ۱ −] تعیین می کنیم.

$y' = -\pi \sin \pi x = ۰ \implies x = -۱$ یا ۱ یا ۰

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$

$\begin{cases} x = 1 \text{ یا } -1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{-1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\frac{1}{2}$		$+1$
y'	0		$+$		0		$-$		0
y	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1



تبصره — برای تعیین تغییرات و رسم منحنی نمایش بعضی از توابع مثلثاتی نیازی به تعیین مشتق و علامت آن نیست و کمترین مقدار و بیشترین مقدار و صعود و نزول تابع را می‌توان در فاصلهٔ مورد نظر تعیین نمود. مثلا در مثال بالا می‌دانیم کسینوس قوس از $\pi-$ تا صفر صعودی و از صفر تا π نزولی است و ماکزیمم و می‌نیموم آن ۱ و ۱ — می‌باشد.

تمرین

الف ـ دورهٔ تناوب هریك از تابعهای زیر را تعیین و منحنی نمایش هریك را در فاصلهٔ یکی از دوره‌های تناوب رسم کنید:

۱) $y = \sin x$ ۲) $y = \cos x$

۳) $y = \operatorname{tg} x$ ۴) $y = \operatorname{cotg} x$

۵) $y = 3\cos 4x$ ۶) $y = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$

۷) $y=۲\sin\frac{x}{۲}$ ۸) $y=\frac{۱}{۳}\sin ۴\pi x$

۹) $y=tg\frac{۳}{۴}x$ ۱۰) $y=tg۲x+۱$

۱۱) $y=۳cotg\pi x$ ۱۲) $y=۴\sin\frac{\pi}{۳}x$

۱۳) $y=۲\cos(x-\frac{\pi}{۴})$ ۱۴) $y=۲\cos ۳\pi(x+\frac{۱}{۶})$

۱۵) $y=\cos\pi x-۲\sin\frac{\pi}{۲}x-۱$

ب ـ **تعریف** - دامنهٔ (Amplitude) یك تابع مثلثاتی متناوب عبارتست از قدر مطلق **نصف تفاضل ماکزیمم و می‌نیمم آن در فاصله‌ای به طول یك دورهٔ تناوب، مثلا در تابع** $y=a\sin x+b$ دامنهٔ آن برابر $|a|$ است زیرا :

$$\text{Max یا Min}=a+b$$

$$\text{Min یا Max}=-a+b$$

$$a+b-(-a+b)=۲a\Rightarrow A=|a|$$

۱۶ـ تابعهایی به‌صورت $a\sin bx$ و $a\cos bx$ بنویسید که:

I) دامنهٔ آنها ۳ و دورهٔ تناوب آنها ۴π و $f(۰)=۰$.

II) دامنهٔ آنها ۵ و دورهٔ تناوب آنها ۱ و $f(۰)=۵$.

III) دامنهٔ آنها ۲٫۰ و دورهٔ تناوب آنها $\frac{۱}{۵۱۲}$ و $f(۰)=۰$.

۱۷ـ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin\frac{۲}{۳}x+\cos\frac{۳}{۲}x$ را تعیین کنید.

۱۸ـ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=tg\frac{p}{q}x+cotg\frac{p}{q}x$ را که در آن p و q اعداد درست و مثبت و نسبت به هم اولند تعیین کنید.

ج ـ مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش هریك از تابعهای زیر در یکی از فاصله‌های دورهٔ تناوب .

۱۹) $y=\frac{\cos x-۱}{۲\cos x+۱}$ ۲۰) $y=\frac{۲\sin x-\sqrt{۳}}{-\sin x+۱}$

۲۱) $y=\frac{tgx-\sqrt{۳}}{tgx-۱}$ ۲۲) $y=\frac{۲\sin x+۱}{\sin x+۲}$

۲۳) $y=\left(\frac{\cos x-۱}{۲\cos x+۱}\right)^۲$ ۲۴) $y=۲\cos^۲x-۳\cos x+۱$

۲۵) $y=\frac{2\sin x-1}{2\cos x+1}$

۲۶) $y=\cos 2x+3\sin x-2$

۲۷) $y=\frac{1}{1+\cos 2x}-tg x$

۲۸) $y=tg x+cotg x$

۲۹) $y=\sec x+\operatorname{cosec} x$

۳۰) $y=\cos x+|\sin x|$

۳۱) $y=tg(3x-\frac{\pi}{4})$

۳۲) $y=\sin x+|\cos x|$

د ــ مطلوبست تعیین تغییرات تابعهای زیر در فاصلهٔ $[0,2\pi]$:

۳۳) $y=\sin x(1+\cos x)$

۳۴) $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$

۳۵) $y=|\sqrt{3}\sin x+\cos x|-2$

هـ ــ در یکی از فاصله‌های دورهٔ تناوب جدول تغییرات تابعهای زیررا تعیین ومنحنی نمایش هریك را رسم کنید .

۳۶) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$

۳۷) $y=\frac{\cos 3x}{\sin 2x}$

۳۸) $y=tg x\cdot tg 2x$

۳۹) $y=\frac{\cos x}{2\,tg x}$

۴۰) $y=\frac{\cos x}{tg 2x}$

۴۱) $y=\sin 3x\cdot\sin x$

۴۲) $y=\frac{\sin x\cos x+1}{\sin x+\cos x}$

۴۳) $y=\frac{\cos x}{2\cos x-1}$

۴۴) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}$

۴۵) $y=\frac{1-2|\sin x|}{2+\sin x}$ و $0\leqslant x\leqslant 2\pi$

۴۶) $y=\frac{2\sin^2 x-\sin x-1}{\sin x+1}$

۴۷) $y=\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x$

۴۸) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x}$

۴۹) $y=\cos x(tg^2 x-1)$

۵۰ ــ تغییرات تابع $y=\frac{\sin \pi x}{\sin\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi x}{2}}$ را در فاصلهٔ $-2\leqslant x\leqslant 2$ بررسی کنید.

۵۱- مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع زیردر فاصلهٔ $[۰,۸]$

$$y=\frac{\sin\frac{\pi x}{۴}-\cos\frac{\pi x}{۴}}{\sin\frac{\pi x}{۲}}$$

مقایسهٔ یك یا چند عدد با ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

۴-۱۲- مقایسه با استفاده از نمودار - اگر معادلهٔ درجهٔ دوم پارامتری :

$$F(x,m)=۰ \quad (۱)$$

را که درآن x از درجهٔ دوم و m پارامتر است داشته باشیم و بخواهیم اعداد معلـومی مانند α و β و... را با ریشه‌های‌آن وقتی‌که پارامتر m تغییرکند مقایسه‌کنیم ، ابتدا m را برحسب x از معادلهٔ (۱) تعیین می‌کنیـم تا $m=f(x)$ بدست‌آید ، آنگاه باتوجه به اینکه ریشه‌های معادلهٔ (۱) همان طولهای‌نقاط برخورد منحنی (C) به معادلهٔ $y=f(x)$ با خط (D) به‌معادلهٔ $y=m$ می‌باشد ، منحنی (C) و خطهای $x=\alpha$ و $x=\beta$ را در یك دستگاه مختصات رسم نموده از روی شکل‌معلوم می‌کنیم به ازای مقادیر مختلف پارامتر m چه موقع خط (D)منحنی (C) را قطع می‌کند و وضع طولهای نقطه‌های بـرخورد منحنی و خط را با اعداد α و βو... مشخص می‌کنیم.

معمولا جدولـی جهت m تنظیم می‌کنیم که در آن مقادیـر m را از $-\infty$ تا $+\infty$ به‌ترتیب می‌نویسیم . به‌خصوص مقادیـر ماکـزیمم و می‌نیموم ، در صورت وجود ، و مقادیـر $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ و... (عرض‌نقاط برخورد خطوط $x=\alpha$ و $x=\beta$با منحنی C)، عرض مجانب افقـی تابع (اگـر وجود داشته باشد) را درآن جدول وارد می‌کنیم . سپس در هـرفاصله خط $y=m$ را در شکل رسم نموده وضع طـولهای برخورد خط (D) و منحنی (C) را نسبت به اعداد α و β مشخص نموده و نتیجه را در جدول می‌نویسیم.

یادآوری - اگر معادلهٔ $F(x,m)=۰$ برحسب x از درجهٔ دوم نباشد و خواسته باشیم عددی را با ریشه‌های‌آن مقایسه‌کنیم ، باز به همین منوال‌که در بالاگفته شد عمل می‌کنیم.

مثال۱- مقایسهٔ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(m-۱)x+۱=۰$ به ازای مقادیـر مختلف m با عدد ۲ .

ابتدا m را برحسب x بدست می‌آوریم :

$$m=\frac{x^۲+x+۱}{x}$$

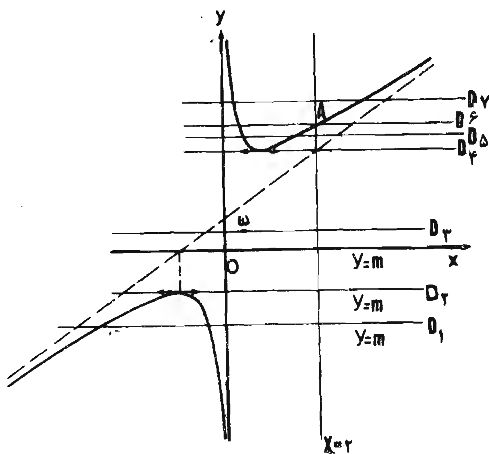
همانطور که گفته شد ریشه‌های معادلهٔ فوق طولهای نقاط برخورد منحنی (C) به معادلهٔ $y=\frac{x^2+x+1}{x}$ وخط (D) به معادلهٔ $y=m$ می‌باشند . حال منحنی (C) را رسم می‌کنیم:

$$y'=\frac{x^2-1}{x^2}\ ,\ y'=0:\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}\ ,\ \begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}\quad\begin{cases}x\to 0\\y\to\pm\infty\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\to\pm\infty\\y\to\pm\infty\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=\frac{7}{2}\end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$			
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

منحنی دارای مجانب قائم $x=0$ و مجانب مایل $y=x+1$ می‌باشد.



از روی شکل بالا جدول زیر را داریم:

m	$-\infty$		-1		3		$3/5$		$+\infty$
R		$x'<x''<2$		ریشه ندارد		$x'<x''<2$		$x'<2<x''$	
		خط D_1		خط D_3		خط D_5		خط D_7	
			$x'=x''<2$		$x'=x''<2$		$x'<x''=2$		
			خط D_2		خط D_4		خط D_6		

مثال ۲ — مقایسهٔ اعداد ۵ و ۰ با ریشه‌های معادلهٔ پارامتری :

$$2x^2-2mx+(m+4)=0$$

$$m=\frac{2x^2+4}{2x-1}\Longrightarrow \begin{cases} (C) & y=\dfrac{2x^2+4}{2x-1} \\ (D) & y=m \end{cases}$$

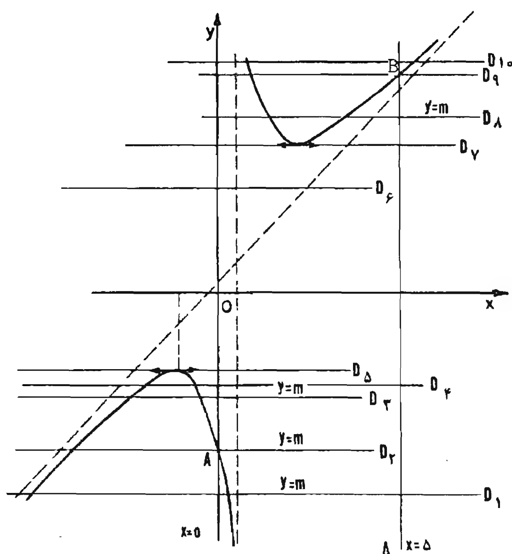
تابع به ازای $x\neq\frac{1}{2}$ معین و پیوسته است.

$$y'=\frac{4x^2-4x-8}{V^2}\ ،\ y'=0\ :\ \begin{cases} x=2 \text{ یا } -1 \\ y=4 \text{ یا } -2 \end{cases}$$

$$A\begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases}\quad B\begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}\quad \begin{cases} x\to\frac{1}{2} \\ y\to\pm\infty \end{cases}\quad \begin{cases} x\to\pm\infty \\ y\to\pm\infty \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		2		5		$+\infty$
y'		+	0	−		−			0	+			
y	$-\infty$	↗	-2	↘	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	6	↗	$+\infty$

منحنی تابع مجانب قائم $x=\frac{1}{2}$ و مجانب مایل $y=x+\frac{1}{2}$ دارد.



با توجه به‌شکل منحنی، جدول زیر تنظیم می‌شود:

m	$-\infty$	-۴	-۲	۴	۶	$+\infty$
R	$x'<۰<x''<۵$	$x'<x''<۰<۵$	ریشه ندارد	$۰<x'<x''<۵$	$۰<x'<۵<x''$	
	خط $D_۱$	خط $D_۳$	خط $D_۶$	خط $D_۸$	خط $D_{۱۰}$	

$x'<x''=۰<۵$ $x'=x''<۰<۵$ $۰<x'=x''<۵$ $۰<x'<x''=۵$

خط $D_۲$ $D_۵$ $D_۷$ خط $D_۹$

مثال۳ـ مقایسهٔ عددهای ۲ و ۴ با ریشه‌های معادلهٔ :

$$(m-۱)x^۲-۳(m-۱)x+۴=۰$$

اگر m را برحسب x بدست آوریم خواهیم داشت : $m=\frac{x^۲+۳x-۴}{x^۲-۳x}$ پس:

$$(C)\quad \begin{cases} y=\dfrac{x^{2}+3x-4}{x^{2}-3x} \\ \\ y=m \end{cases}\quad (D)$$

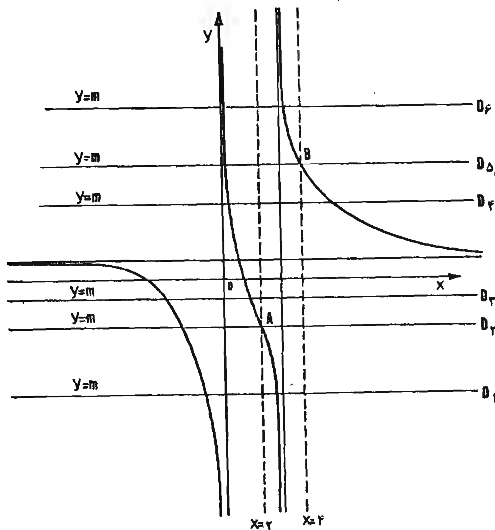
$$y'=\frac{-6x^{2}+8x-12}{V^{2}} \Rightarrow y'<0$$

$$\begin{cases} x=1 \text{ یا } -4 \\ y=0 \end{cases} \qquad A\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \qquad B\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\to\pm\infty \\ y\to 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\to 0 \\ y\to\pm\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x\to 3 \\ y\to\pm\infty \end{cases}$$

x	$-\infty$	-4	0		1	2	3		4	$+\infty$
y'		$-$	||		$-$		||		$-$	
y	1 ↘	0 ↘	$-\infty$ ||	$+\infty$ ↘	0 ↘	-3 ↘	$-\infty$ ||	$+\infty$ ↘	6 ↘	1

برای منحنی دو مجانب قائم $x=0$ و $x=3$ و مجانب افقی $y=1$ وجود دارد.



m	$-\infty$ … -3	-3 … 1	1 … 6	6 … $+\infty$
R	$x' < 2 < x'' < 4$	$x' < x'' < 2 < 4$	$x' < 2 < 4 < x''$	$x' < 2 < x'' < 4$
	خط D_1	خط D_3	خط D_4	خط D_6

$x' < x'' = 2 < 4$ خط D_2 $\qquad$ $x' < 2 < x'' = 4$ خط D_5

$x' = -\infty < x'' < 2 < 4$ $\qquad$ $x' < 2 < 4 < x'' = \infty$

مثال۴- بحث در تعداد وعلامت ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم $x^3 - 3x^2 - 9x - \lambda = 0$ وقتیکه پارامتر λ تغییر کند. برای این‌کار باید عدد صفر را با ریشه‌های معادلهٔ بالا مقایسه کرد.

داریم: $\lambda = x^3 - 3x^2 - 9x$ پس:

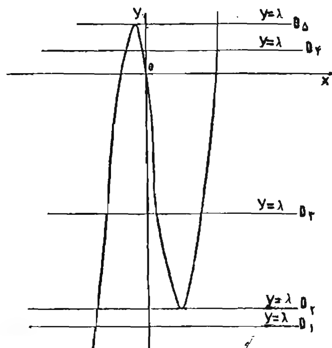
$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 - 9x & (C) \\ y = \lambda & (D) \end{cases}$$

تابع فوق همواره معین و اتصالی است.

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 \text{ ،} \; y' = 0 : \begin{cases} x = +3 \text{ یا } -1 \\ y = -27 \text{ یا } 5 \end{cases} \quad O \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to \pm\infty \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}(3-3\sqrt{5})$		-1		0		1		3		$\frac{1}{2}(3+3\sqrt{5})$		$+\infty$
y'		+		+	0	−		−		−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	5	↘	0	↘	-11	↘	-27	↗	0	↗	$+\infty$



λ	$-\infty$	-27	0	5	$+\infty$
R	$x_1<0$	$x_1<0<x_2<x_3$	$x_1<x_2<0<x_3$	$0<x_1$	
	خط D_1	خط D_2	خط D_3		

$x_1<0<x_2=x_3$ خط D_4 — $x_1<x_2=0<x_3$ محور xها — $x_1=x_2<0<x_3$ خط D_5

چنانکه از روی جدول دیده می‌شود معادلهٔ بالا ممکن است دارای سه ریشه یا دو ریشه‌یا یك ریشه باشد وعلامت ریشه‌ها نیز در هر قسمت مشخص است.

مثال ۵ــ اولاً جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع $y=\frac{3x+2}{x^2-2x}$ را رسم کنید. ثانیاً ازروی شکل منحنی در تعداد ریشه‌های معادلهٔ مثلثاتی

$$m(2\sin X+1)^2-(2m+3)(2\sin X+1)-2=0$$

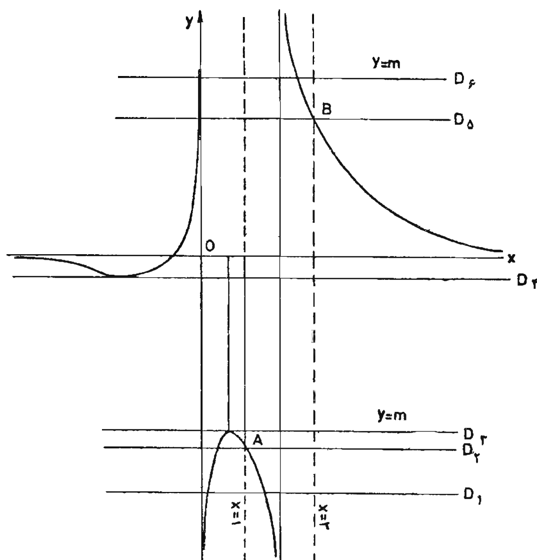
که درآن X بین $\frac{\pi}{2}$ و ۰ است بحث کنید.

اولاً: تابع به ازای کلیهٔ مقادیر باستثنای ۰و۲ معین و پیوسته است.

$$y'=\frac{-3x^2-4x+4}{V^2},\quad y'=0:\ \begin{cases} x=-2 \text{ یا } \frac{2}{3} \\ y=\frac{-1}{2} \text{ یا } -\frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\to 0 \text{ یا } x\to 2 \\ y\to\pm\infty \end{cases}\qquad \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} x\to\pm\infty \\ y=0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		$\frac{-2}{3}$		0		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$			‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y	0	↘	$\frac{-1}{2}$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{-9}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0



ثانیاً ـ هرگاه m را ازمعادلهٔ مثلثاتی بدست آوریم خواهیم داشت:

$$m = \frac{3(2\sin X+1)+2}{(2\sin X+1)^2-2(\sin X+1)}$$

چنانکه می‌بینید مثل آن است که در تابع به‌جای x مقدار $2\sin X+1$ را قرار داده باشیم و

چون $0 \leqslant X \leqslant \frac{\pi}{2}$ پس $0 \leqslant \sin X \leqslant 1$ یعنی $1 \leqslant 2\sin X+1 \leqslant 3$ و یا $1 \leqslant x \leqslant 3$ تغییر می‌کند پس

باید اعداد ۳ و ۱ را با ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $mx^2-(2m+3)x-2=0$ مقایسه کنیم.

m	$-\infty$		-5		$-\frac{9}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{11}{3}$		$+\infty$
R		$x'<1<x''<3$		$x'<x''<1<3$		ریشه ندارد		$x'<x''<1<3$		$x'<1<3<x''$		$x'<1<x''<3$	
		یک‌جواب قابل قبول		جواب ندارد		ندارد		جواب ندارد		جواب ندارد		یک‌جواب دارد	
		$0<X'<\frac{\pi}{2}$	$X'=0$								$X'=\frac{\pi}{2}$	$0<X'<\frac{\pi}{2}$	

تمرین

الف ـ در وجود و علامت ریشه‌های هریك ازمعادله‌های زیر وقتی که پارامتر تغییر کند از روی شکل منحنی بحث کنید.

$$1)\qquad (2m-1)x^2-4x+m-4=0$$

$$2)\qquad (m+1)x^2-mx+m+1=0$$

$$3)\qquad (m-2)x^2+3x+m+2=0$$

ب ـ هریك از منحنی‌های زیر را باخط $y=m$ قطع نموده طول نقاط برخورد را با اعداد ۲ ــ و ۱ ــ و ۱ مقایسه کنید.

$$4)\qquad y=\frac{3x^2-4x+3}{x^2-x+1} \qquad\qquad 5)\qquad y=\frac{x^2+1}{2x^2-5x+2}$$

$$6)\qquad y=\frac{x^2-4}{x^2-1} \qquad\qquad 7)\qquad y=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$$

$$8)\qquad y=\frac{x^2+|x|+1}{x^2+1} \qquad\qquad 9)\qquad y=\frac{(x+1)^2}{x^2+x-2}$$

ج ـ اعداد α و β را باریشه‌های هریك از معادله‌های زیر وقتی که پارامتر m تغییر کند مقایسه کنید.

$$10)\quad mx^2-(3m+1)x+2m=0 \qquad ، \alpha=1 \quad , \beta=2$$

$$11)\quad (m-1)x^2-mx-2(m+1)=0 \qquad ، \alpha=-1 \quad , \beta=1$$

$$12)\quad (1+2m)x^2-2x+(2-3m)=0 \qquad ، \alpha=-1 \quad , \beta=2$$

$$13)\quad mx^2-2(m+1)x+3m+4=0 \qquad ، \alpha=-2 \quad , \beta=1$$

۱۴ــ معادلهٔ درجه دوم زیر مفروض است:

$$(1-m)x^2+(3m-5)x+8-4m=0$$

۱) در وجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ فوق وقتی که پارامتر m تغییر کند بحث کنید.

۲) فرض کنیم m درفاصله‌ای است که دوریشهٔ معادله مثبت است . تحقیق کنید که طول‌وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع مجاوربه زاویهٔ قائمه‌اش بطولهای x'وx'' (ریشه‌های معادله)هستند

تابعی ست از m به صورت $h(m)=\left|\frac{m-3}{m-1}\right|$

۳) مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع $h(m)$

۱۵ــ در تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم زیر وقتی که پارامتر λ تغییر کند بحث کنید (از روی شکل منحنی)

$$(x-1)^3-\lambda x^2=0$$

۱۶ــ معادلهٔ زیر مفروض است:

$$(m-1)\sin^2 x-4m+1=0$$

هرگاه $\sin x$ را X بنامیم به کمك منحنی نمایش تابع $y=\frac{X^2-1}{X^2-4}$ حدود m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ مثلثاتی بالا دارای ریشه باشد.

۱۷ــ معادلهٔ $(m-1)\sin^2 x-4m\sin x+4m=0$ که در آن m پارامتر است مفروض است:

در تعداد ریشه‌های مُعادله که بین (0 و 2π) است وقتی که پارامتر m تغییر می‌کند بحث کنید.

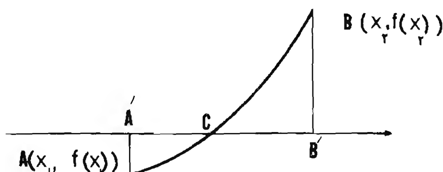
راهنمائی: $\sin x$ را برابر X قرارداده منحنی (C) نمایش $y=\frac{X^2}{(X-2)^2}$ را رسم و از روی‌آن نتیجه را تحقیق کنید.

تعیین تعداد ریشه‌ها وحل تقریبی معادلهٔ درجه سوم

۲-۱۳- مقدمه: هرچند ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم $f(x)=0$ را بوسیلهٔ فرمولهایی بر حسب ضرایب معادله تعیین نموده‌اند ولی چون ریشه‌ها معمولا به‌صورت‌رادیکالهای مرکب با شماره‌های ریشگی ۲و۳ بدست آمده‌اند ، درمورد معادله‌هایی که ضرایبشان حرفی نبوده و **اعداد حقیقی‌مشخص‌باشند می‌توان ریشه‌ها را بطور تقریبی به دست آورد. در زیر پس از ذکر دونکته، راه بدست آوردن ریشه‌های تقریبی معادله به چند روش بیان می‌شود.**

۲-۱۴- نکته ۱ - هرگاه تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[x_1$ و $x_2]$ معین‌وپیوسته بوده و در یك‌جهت سیر کند (فقط صعودی یا فقط نزولی باشد) و $f(x_1)$ و $f(x_2)$ دارای علامتهای مختلف باشند، حتماً معادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ مذکور یك ریشه دارد.

زیرا مطابق شکل مثلا اگر $f(x_1)<0$ و $f(x_2)>0$ چون تابع در فاصلهٔ A وB صعودی است هرگاه نقطهٔ متغیر M به طول x روی منحنی از A به طرف B تغییر مکان دهد.



یعنی x آن زیاد شود y آن نیز مرتباً زیاد می‌شود وچون عرض آن ابتدا منفی وسپس در B مثبت شده‌است وتابع f پیوسته‌است ناچار درفاصلهٔ مذکور یک‌جا صفرخواهدشد ومعادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ $[x_1, x_2]$ یك ریشه دارد.

۲-۱۵-نکته ۲- تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم $f(x)=0$

ابتدا مشتق تـابع $y=f(x)$ را که یک سه‌جمله‌ای درجه دوم خواهد شد تعیین و مبین مشتق یعنی Δ راتعیین می‌کنیم؛

الف- هرگاه $\Delta\leqslant 0$ باشد مشتق همواره دارای یك علامت (مگر درریشهٔ مضاعف معادله درحالت $\Delta=0$) وبالنتیجه تابع $y=f(x)$ در یك جهت تغییر می‌کند وچون y از $-\infty$ تا $+\infty$ (یا از $+\infty$ تا $-\infty$ برحسب آن که ضریب درجه سوم مثبت یامنفی باشد) در یك جهت سیر می‌کند ناچار معادله یك ریشه دارد.

ب: $\Delta>0$ دراین‌صورت‌مشتق دارای دوریشه وتابع دارای‌یك‌ماکزیمم‌ویك‌می‌نیموم‌است:
اگر ماکزیمم و می‌نیموم دارای یك علامت باشند، به سهولت از روی جدول تغییرات تابع معلوم می‌شود که $f(x)=0$ یك ریشه دارد.

اگر ماکزیمم و می‌نیموم دارای علامتهای مختلف بـاشند (بـه سهولت از روی جدول تغییرات‌دیده می‌شود) که معادلهٔ $f(x)=0$ داری سه ریشه است. اگر مـاکزیمم یـا می‌نیموم صفر باشد (از روی‌جدول تغییرات مشاهده می‌شود) معادله دارای دوریشه است یکی مضاعف (که خود به خود بدست آمده) ویکی ساده است.

برای اینکه مطلب روشن شود به مثالهای ذیل توجه نمائید.

مثال۱- تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ: $x^3+x^2+2x+5=0$

تابع $y=x^3+x^2+2x+5$ را در نظر گرفته مشتق‌آن $y'=3x^2+2x+2$ را که در آن Δ منفی است بدست‌می‌آوریم پس مشتق همواره مثبت است .

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

چون y همواره صعودی و از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کرده است پس معادله ناچار یك ریشه دارد .

مثال۲- تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ: $-x^3+x^2-4x-3=0$

تابع $y=-x^3+x^2-4x-3$ را در نظرمی گیریم:

$y'=-3x^2+2x-4$ ، $\Delta=1-12<0 \Rightarrow y'<0 \Rightarrow$ تابع نزولی

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

معادله یك ریشه دارد.

مثال۳- تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ: $x^3+3x^2+3x-4=0$

تابع $y=x^3+3x^2+3x-4$ را درنظر می گیریم:

$y'=3x^2+6x+3$ ، $\Delta=0 \Rightarrow y'\geq 0$ تابع صعودی

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

معادله‌یك ریشهٔ $(x_1>-1)$ دارد.

مثال۴- تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ: $x^3-12x+1=0$

تابع $y=x^3-12x+1$ را در نظر می گیریم

$y'=3x^2-12 \Rightarrow 3x^2-12=0 \Rightarrow x=\pm 2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

با توجه به جدول بالا ونکتهٔ۱ ملاحظه می‌شود که معادلهٔ فوق سه ریشه دارد به این شرح:

$x_1<-2$ و $-2<x_2<2$ و $x_3>2$

مثال۵- تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ: $x^3-3x+10=0$

$y=x^3-3x+10$ و $y'=3x^2-3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	12	↘	8	↗	$+\infty$

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌شود که معادلهٔ فوق فقط یك ریشهٔ $x_1 < -1$ دارد.

مثال۶- تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ : $x^3-6x^2+32=0$

$y=x^3-6x^2+32$ و $y'=3x^2-12x$

چنان‌که دیده می‌شود $x'=x''=4$ (زیرا محور xها برمنحنی مماس است) و $x'''<0$ است که می‌توان آنرا دقیقا بدست آورد که $x'''=-2$ می‌شود.

x	$-\infty$		0		4		∞
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	32	↘	0	↗	$+\infty$

۲ - ۱۶ - حالت کلی بحث در تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم - معادلهٔ درجهٔ سوم کلی :

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

را با تبدیل $x=X-\frac{b}{3a}$ می‌توان به معادله‌ای به‌صورت زیردرآورد:

$$X^3+pX+q=0$$

بنابراین کافی است که در تعداد ریشه‌های معادله‌ای از نوع اخیربحث کنیم.

برای بحث در تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم:

$$x^3+px+q=0 \quad (1)$$

بنا به نکتهٔ ۲ ، تغییرات تابع زیر را بررسی می‌کنیم :

$$y=x^3+px+q \quad (2)$$

مشتق این تابع می‌شود:

$$y'=3x^2+p \quad (3)$$

هرگاه $p>0$ معادلهٔ $3x^2+p=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد و y' همواره مثبت است.

همچنین هرگاه $p=0$ باشد، مشتق در ازای $x=0$ صفر می‌شود اما تغییر علامت نمی‌دهد و به ازای $x\neq 0$ همواره مثبت است. بنابراین در حالت $p\geqslant 0$ تابع (۲) همواره صعودی است ومنحنی نمایش تابع فقط دریك نقطه محور xها را قطع می‌کند. یعنی هرگاه $p\geqslant 0$ معادلهٔ (۱) فقط یك ریشه دارد.

هرگاه $p<0$ مشتق درازای دومقدار x_1 و x_2 صفرشده وتغییرعلامت میدهد. در این حالت تابع (۲) یك ماکـزیمم و یك می‌نیمم دارد. اگر M_1 و M_2 نقطه‌های نظیر ماکزیمم و می‌نیمم باشند باید معلوم کنیم که چه موقع این دو نقطه در یك طرف محور xها و چه موقع در دوطرف آن قرار دارند.

بافرض $M_1(x_1, y_1)$ و $M_2(x_2, y_2)$ ازمعادلهٔ $3x^2+p=0$ نتیجه می‌شود که:

$$x_1+x_2=0 \text{ و } x_1x_2=\frac{p}{3} \qquad (۴)$$

و از معادلهٔ (۲) خواهیم داشت:

$$y_1y_2=(x_1^3+px_1+q)(x_2^3+px_2+q)$$
$$y_1y_2=(x_1x_2)^3+px_1x_2[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+$$
$$q(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)+pq(x_1+x_2)+p^2x_1x_2+q^2$$

با توجه به رابطه‌ای (۴) داریم:

$$y_1y_2=\frac{p^3}{27}-\frac{2p^3}{9}+\frac{p^3}{3}+q^2=\frac{4p^3+27q^2}{27}$$

هرگاه $4p^3+27q^2>0$ در این‌صورت $y_1y_2>0$ پس y_1 و y_2 هم‌علامتند و دونقطهٔ M_1 و M_2 در یك طرف محور $x'x$ واقعند. در این حالت منحنی تابع (۲) فقط در یك‌نقطه محور $x'x$ را قطع می‌کند و معادلهٔ (۱) فقط یك ریشه دارد.

هـرگاه $4p^3+27q^2=0$ در این صورت $y_1y_2=0$ و حداقل یکـی از دو مقدار y_1 یا y_2 برابر صفر است. پس منحنی نمایش تابع در یك نقطه برمحور $x'x$ مماس و در یك نقطهٔ دیگـر آن را قطع می‌کند. در ایـن حالت معادلهٔ (۱) یك ریشهٔ مضاعف و یك ریشهٔ ساده دارد.

هرگاه $4p^3+27q^2<0$ در این‌صورت $y_1y_2<0$ و دونقطهٔ M_1 و M_2 در دوطرف محور $x'x$ واقعند و منحنی نمایش تابع (۲) با محور $x'x$ در سه نقطه متلاقی است. دراین حالت معادلهٔ (۱) سه ریشه دارد.

خلاصهٔ بحث ـ با توجه به اینکه اگر $p>0$ باشد $4p^3+27q^2$ نیز مثبت خواهدبود. بحث در تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x^3+px+q=0$ به‌صورت‌زیرخلاصه می‌شود:

الف ـ اگر $۴p^۳+۲۷q^۲>۰$ ، معادله فقط یك ریشهٔ حقیقی دارد .

ب ـ اگر $۴p^۳+۲۷q^۲=۰$ ، به‌فرض $p\neq ۰$ معادله یك ریشهٔ حقیقی مضاعف و یك ریشهٔ حقیقی‌ساده دارد . وهرگاه $p=۰$ در این صورت $q=۰$ و معادله به‌صورت $x^۳=۰$ است.

ج ـ اگر $۴p^۳+۲۷q^۲<۰$ ، معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد.

تبصرهٔ ۱ـ از روی نمودار تابع (۲) در هریك از حالتهای سه‌گانهٔ بالا ، به سادگی می‌توان از روی علامت q علامت ریشه یا ریشه‌های معادله را نیز تعیین کرد.

تبصرهٔ ۲ـ بعضی‌از معادله‌های درجهٔ سوم را با تبدیلی غیراز $x=X-\frac{b}{۳a}$ نیزمی‌توان به‌صورت معادله‌ای‌از نوع (۱) درآورد . به مثال زیر توجه کنید.

مثال ـ بحث درتعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم:

$$x^۳-۳x^۲-m=۰$$

با فرض $X=\frac{۱}{x}$ داریم:

$$X^۳+\frac{۳}{m}X-\frac{۱}{m}=۰$$

$$۴p^۳+۲۷q^۲=\frac{۴\times ۲۷}{m^۳}+\frac{۲۷}{m^۲}=\frac{۲۷(m+۴)}{m^۳}$$

بحث را به‌صورت جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

m	$-\infty$	-۴		۰	$+\infty$
$۴p^۳+۲۷q^۲$	+	۰	−		+
تعداد ریشه‌ها	یك ریشهٔ ساده	یك ریشهٔ ساده و یك ریشهٔ مضاعف	سه ریشه	یك‌ریشهٔ ساده و یك ریشهٔ مضاعف	یك ریشهٔ ساده

۲ـ۱۷ـ تعیین ریشه‌های تقریبی معادلهٔ درجهٔ سوم از راه تقریبهای متوالی ـ با توجه به دونکته‌ای که در ابتدای این بخش ذکر کردیم ، فرض کنیم بدانیم معادله یك ریشه بین دو مقدار $x_۱$ و $x_۲$ دارد ، یعنی مثلاً $f(x_۱)<۰$ و $f(x_۲)>۰$ وبخواهیم آن ریشه را با تقریب به‌خصوصی پیدا کنیم .

ابتدا به جای x عدد دلخواهی مانند $x_۰$ که در فاصلهٔ $]x_۱, x_۲[$ باشد قرار می‌دهیم ،

اگر احیاناً $f(x_0)$ صفر شد که x_0 خود ریشهٔ معادله است. اما اگر $f(x_0)$ صفر نبود مثبت یا منفی می‌باشد. مثلاً اگر $f(x_0)<0$ معلوم می‌شود معادله یك ریشه بین x_0 ، x_2 دارد زیرا $f(x_0)<0$ و $f(x_2)>0$. به همین ترتیب اعداد دیگری را امتحان می‌کنیم (ابتدا اعداد درست تاموقعی که ریشه بین دو عدد متوالی باشد، سپس اعداد اعشاری) تا مثلاً به موردی برسیم که داشته باشیم: $f\left(\frac{a}{10}\right)<0$ و $f\left(\frac{a+1}{10}\right)>0$ یا بالعکس (a عددی درست است) در این صورت داریم $\frac{a}{10}<x<\frac{a+1}{10}$ و $\frac{a}{10}$ ریشهٔ تقریبی معادله تا $\frac{1}{10}$ تقریب نقصانی و $\frac{a+1}{10}$ مقدار تقریبی ریشه تا $\frac{1}{10}$ تقریب اضافی است.

حال اگر خواسته باشیم ریشهٔ معادله را تا $\frac{1}{100}$ تقریب تعیین کنیم چون:

$$\frac{10a}{100}<x<\frac{10(a+1)}{100}$$

می‌باشد، در فاصلهٔ مذکور به x مقادیر مختلف می‌دهیم تا به موردی برسیم که مثلا داشته باشیم $f\left(\frac{a'}{100}\right)<0$ و $f\left(\frac{a'+1}{100}\right)>0$ (a' عددی درست است) در این صورت داریم:

$$\frac{a'}{100}<x<\frac{a'+1}{100}$$

و $\frac{a'}{100}$ ریشهٔ تقریبی نقصانی معادله و $\frac{a'+1}{100}$ ریشهٔ تقریبی اضافی تا $\frac{1}{100}$ تقریب می‌باشد. به‌همین ترتیب با تقریبهای دیگر $\frac{1}{1000}$ و $\frac{1}{10000}$ ، ...، می‌توان به‌هر اندازه که‌خواسته باشیم به ریشه نزدیك شویم.

توجه: هرگاه معادله‌ای دارای یك ریشهٔ گویا باشد و آن را از این راه حل کنیم و مثلا ندانیم معادله ریشهٔ گویا $\frac{a}{10}$ یا $\frac{a'}{100}$ داشته باشد از راه فوق ریشهٔ معادله عیناً بدست خواهد آمد.

مثال ۱- حل معادلهٔ $x^3-3x-52=0$

تابع $y=x^3-3x-52$ را درنظر می‌گیریم. داریم: $y'=3x^2-3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-50	↘	-54	↗	$+\infty$

با توجه به‌جدول می‌بینیم که معادله فقط یک‌ریشهٔ $۱<x$ دارد. حال عددی مثلا ۵ را انتخاب و $f(۵)$ را حساب میکنیم :

$$f(۱)=-۵۴<۰ \text{ و } f(۵)=۵۸>۰ \Longrightarrow ۱<x<۵$$

حال مثلا $f(۲)$ را محاسبه می‌کنیم خواهد شد. $f(۲)=-۵۰<۰$ پس ریشهٔ معادله $۲<x<۵$ می‌باشد. برای $f(۳)$ داریم:
$f(۳)=-۳۴<۰$ پس خواهیم‌داشت: $۳<x<۵$. اکنون عدد ۴ را امتحان‌می‌کنیم، $f(۴)=۰$ پس ریشهٔ معادله عدد ۴ است.

مثال۲- تعیین ریشه‌های معادلهٔ $x^۳-۳x-۶=۰$ تا ۰/۱ تقریب نقصانی.

$$y=x^۳-۳x-۶$$

$$y'=۳x^۲-۳$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	-۸	↘	-۴	↗	$+\infty$

با توجه به‌جدول می‌بینیم معادله فقط یک‌ریشهٔ $۱<x$ دارد. حال عددی مانند ۳ را که از ۱ بزرگتر است امتحان می‌کنیم، $f(۳)=۱۲>۰$ پس معادله یک‌ریشه درفاصلهٔ $۱<x<۳$ دارد، زیرا $f(۱)<۰$.

حال عدد ۲ راامتحان می‌کنیم : $f(۲)=-۴<۰$ پس $۲<x<۳$
عدد دلخواه ۲/۴ راکه بین ۳ و ۲ است امتحان می‌کنیم:

$$f(۲/۴)=۰/۶۲۴>۰ \Longrightarrow ۲<x<۲/۴$$

عدد ۲/۳ را امتحان می‌کنیم:

$$f(۲/۳)=-۰/۷۳۳ \Longrightarrow ۲/۳<x<۲/۴$$

بنابراین $x\simeq ۲/۳$ ریشهٔ معادله با ۰/۱ تقریب نقصانی است.

مثال۳- تعیین ریشه‌های معادلهٔ $x^۳-۳x^۲+۳=۰$ تا ۰/۱ تقریب نقصانی

$$y=x^۳-۳x^۲+۳$$

$$y'=۳x^۲-۶x$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۳	↘	-۱	↗	$+\infty$

با توجه به جدول مشاهده می‌شود معادله سه ریشه دارد:

$$x_1<0 \quad و \quad 0<x_2<2 \quad و \quad x_3>2$$

که هر کدام را می‌توان مطابق آنچه در بالا گفته شد بدست‌آورد.

مثلا ریشهٔ $x_1<0$ راتعیین می کنیم: $f(-1)=-1<0$ و چون $f(0)>0$ است پس:

$$-1<x<0$$

حال $f(-0/5)$ را حساب می‌کنیم: $f(-0/5)>0$ پس‌نتیجه می‌شود:

$$-1<x<-0/5$$

حال $f(-0/7)$ را تعیین می کنیم: $f(-0/7)>0$ پس خواهیم داشت:

$$-1<x<-0/7$$

حال $f(-0/9)$ را بدست می‌آوریم: $f(-0/9)<0$ پس داریم:

$$-0/9<x<-0/7$$

حال $f(-0/8)$ را حساب میکنیم: $f(-0/8)>0$ پس‌داریم:

$$-0/9<x<-0/8$$

بنابراین یکی‌از ریشه‌ها $x_1 \simeq 0/9$ باتقریب $0/1$ نقصانی خواهد بود. به همین‌ترتیب می‌توان دوریشهٔ دیگر را حساب کرد.

مثلا برای ریشهٔ $0<x_2<2$ داریم $f(0)=3>0$ و $f(1)=1>0$ پس: $1<x<2$ و داریم:

$$f(1/5)<0 \Rightarrow 1<x<1/5$$

$$f(1/3)>0 \Rightarrow 1/3<x<1/5$$

$$f(1/4)<0 \Rightarrow 1/3<x<1/4$$

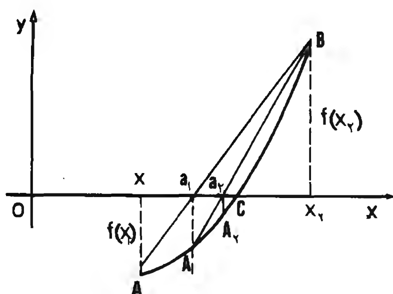
پس ریشهٔ دیگر معادله $x \simeq 1/3$ با $0/1$ تقریب نقصانی است:

به همین ترتیب ریشهٔ $x_3>2$ را حساب می‌کنیم تا بدست آید.

$$x_3 \simeq 2/5$$

۲-۱۸- تعیین ریشه‌های معادله از روش وترها (روش لاگرانژ)

فرض‌کنیم تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[x_1 \text{ و } x_2]$ معین و پیوسته و یکنوا (یافقط‌صعودی یافقط نزولی) باشد ومثلا $f(x_1)<0$ و $f(x_2)>0$ باشد. بدیهی است معادلهٔ $f(x)=0$ یك ریشهٔ بین x_2 و x_1 دارد.



حال‌وتر AB را رسم نموده معادلهٔ خط AB را می‌نویسیم:

$$\frac{y-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

اگر طول برخورد خط AB با محورxها a_1 باشد داریم:

$$(1)\qquad a_1=x_1-\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}$$

حال $f(a_1)$ را از معادلهٔ $y=f(x)$ تعیین می‌کنیم تا عرض A_1، که مثلاً درشکل منفی است، بدست‌آید. a_2 محل برخورد A_1B بامحورxها را باکمك رابطهٔ (۱) کـه درآن x_1 همان a_1 می‌باشد بدست می‌آوریم تا a_2 بدست‌آید:

$$a_2=a_1-\frac{(x_2-a_1)f(a_1)}{f(x_2)-f(a_1)}$$

به این‌ترتیب a_2 به نقطهٔ C نزدیك‌می‌شود واینقدر عمل را ادامه می‌دهیم تا بیشتر به‌ریشهٔ واقعی نزدیك شویم وبا هر تقریب‌که بخواهیم ریشه در اختیار ما باشد.

مثال- حل معادلهٔ $x^3-3x-5=0$ باروش وترها

$$\begin{cases} y=x^3-3x-5 \\ y'=3x^2-3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	-7	↗	$+\infty$

چنانکه دیده می‌شود معادله فقط یك ریشهٔ $x > ۱$ دارد:

$$\begin{matrix} f(۲) = -۳ < ۰ & & x_۱ = ۲ \\ & \Longrightarrow & \\ f(۳) = ۱۳ > ۰ & & x_۲ = ۳ \end{matrix}$$

از فرمول (۱) استفاده می‌کنیم:

$$a_۱ = ۲ - \frac{(۳-۲)(-۳)}{۱۳+۳} \Longrightarrow a_۱ \simeq ۲/۱۸۷ \Longrightarrow f(a_۴) =$$

$$f(۲/۱۸۷) = -۱/۱۰۱ < ۰$$

$$a_۲ = ۲/۱۸۷ - \frac{(۳-۲/۱۸۷)(-۱/۱۰۱)}{۱۳+۱/۱۰۱} \Longrightarrow a_۲ = ۲/۲۵ \Longrightarrow$$

$$f(۲/۲۵) \simeq -۰/۳۶$$

پس داریم: $۲/۲۵ < x < ۳$

$$a_۳ = ۲/۲۵ - \frac{(۳-۲/۲۵)(-۰/۳۶)}{۱۳+۰/۳۶} \Longrightarrow a_۳ = ۲/۲۷$$

$$\Longrightarrow f(a_۳) = f(۲/۲۷) = -۰/۱۱۳$$

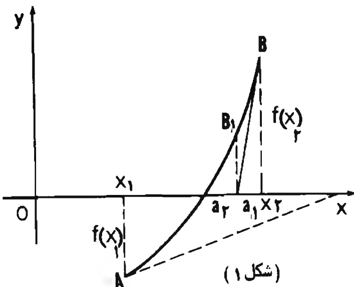
$$a_۴ = ۲/۲۷ - \frac{۰/۷۳(-۰/۱۱۳)}{۱۳/۱۱۳} \Longrightarrow a_۴ = ۲/۲۷۵$$

$$\Longrightarrow f(a_۴) = f(۲/۲۷۵) = -۰/۰۵$$

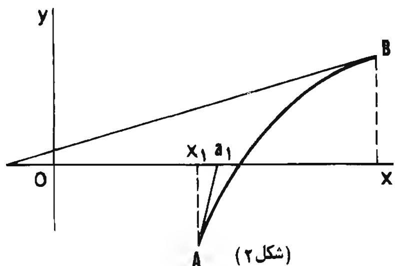
$$a_۵ = ۲/۲۷۵ - \frac{۰/۷۲۵(-۰/۰۵)}{۱۳/۰۵} \Longrightarrow a_۵ = ۲/۲۷۷$$

بنابراین ریشهٔ تقریبی نقصانی معادله $x \simeq ۲/۲۷۷$ می‌باشد.

۲-۱۹-روش مماس‌ها (روش نیوتن)- اگر تابع $y = f(x)$ درفاصلهٔ $[x_۱ \text{ و } x_۲]$ معین **وپیوسته ویکنوا(فقط صعودی یا فقط نزولی) باشد وبدانیم $f(x_۱)$ و $f(x_۲)$ مختلف العلامت هستند مثلا مطابق شکل‌های زیر**



(شکل ۱)



(شکل ۲)

$f(x_1)<0$ و $f(x_2)>0$ ؛ مماس در B (شکل ۱) بر منحنی محورx ها را در نقطه‌ای به طول a_1 بین x_2 و x_1 قطع می‌کند. برای تعیین a_1 معادلهٔ مماس در B بر منحنی را می‌نویسیم: $y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2)$ که در ازاء $y=0$ و $x=a_1$ داریم:

(۱) $a_1=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$. حال نقطهٔ B_1 را روی منحنی به‌طول a_1 و به عرض $f(a_1)$ تعیین و مجدداً مماس بر B_1 را رسم می‌کنیم تا محورxها را در نقطه‌ای به طول a_2 قطع کند که طول آن را ازرابطهٔ $a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$ بدست‌می‌آوریم و به‌همین ترتیب عمل را ادامه‌می‌دهیم تا هرچه بیشتر به ریشهٔ واقعی معادله که در فاصلهٔ $[x_1$ و $x_2]$ است نزدیك شویم.

توجه ـ در شکل (۱) مماس را در شروع حل مسئله از B رسم کردیم زیرا اگر از A رسم می‌کردیم محل برخورد مماس بامحور xها خارج $[x_1 و x_2]$ می‌بود. بـرعکس در شکل (۲) بـاید مماس را از A رسم نمودکه طول برخورد آن با محورxها یعنی a_1 در فـاصلهٔ $[x_1$ و $x_2]$ باشد. درآن‌صورت در رابطهٔ (۱) به جای x_2 مقدار x_1 را قرار می‌دهیم تا $a_1=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ بدست آید.

بطورکلی اگر y'' در فاصلهٔ $]x_1$ و $x_2[$ مثبت باشد (تقعر منحنی به طرف جهت مثبت yها باشد شکل ۱) مماس را درنقطهٔ B که‌عرض‌آن $(f(x_2)>0)$ مثبت است رسم می‌کنیم.

واگر y'' مشتق‌ثانی درفاصلهٔ $]x_1$ و $x_2[$ منفی باشد (تقعرمنحنی به طرف جهت منفی yها باشد شکل۲) مماس رادر نقطهٔ A که $f(x_1)<0$ عرض‌آن منفی است رسم می‌کنیم.

مثال: حل معادلهٔ $x^3-3x-5=0$ باروش مماسها (قبلا با روش وترها حل کرده‌ایم)

$$y=x^3-3x-5 \quad و \quad y'=3x^2-3 \quad و \quad y''=6x$$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	-7	↗	$+\infty$

$$f(2)=-3<0 \quad و \quad f(3)=13>0$$

پس معادله دارای یك ریشهٔ بزرگتر از ۲ می‌باشد. چون y'' درفاصلهٔ $]0$ و $+\infty[$ مثبت‌است‌پس مشتق ثانی درفاصلهٔ $]2$ و $3[$ نیز مثبت است وباید مماس را در نقطهٔ به طول۳ که عرضش مثبت است رسم کرد .

بنابراین دررابطهٔ $a_1=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ به جای x_2 عدد ۳ راقرار می‌دهیم.

$$a_۱ = ۳ - \frac{f(۳)}{f'(۳)} \Rightarrow a_۱ = ۳ - \frac{۱۲}{۲۴} \Rightarrow a_۱ \simeq ۲/۴۵۸$$

$$a_۲ = a_۱ - \frac{f(a_۱)}{f'(a_۱)} \Rightarrow f(a_۱) = f(۲/۴۵۸) \simeq ۲/۴۷۶ \quad و$$

$$f'(a_۱) = f'(۲/۴۵۸) \simeq ۱۵/۱۲۵$$

$$a_۲ = ۲/۴۵۸ - \frac{۲/۴۷۶}{۱۵/۱۲۵} \Rightarrow a_۲ \simeq ۲/۲۹۴$$

$$a_۳ = a_۲ - \frac{f(a_۲)}{f'(a_۲)} \Rightarrow \begin{cases} f(a_۲) = f(۲/۲۹۴) \simeq ۰/۱۹ \\ f'(a_۲) = f'(۲/۲۹۴) \simeq ۱۲/۷۸۷ \end{cases}$$

$$a_۳ = ۲/۲۹۴ - \frac{۰/۱۹}{۱۲/۷۸۷} \Rightarrow a_۳ \simeq ۲/۲۷۹۲$$

$$a_۴ = a_۳ - \frac{f(a_۳)}{f'(a_۳)} \Rightarrow \begin{cases} f(۲/۲۷۹۲) \simeq ۰/۰۰۲۲ \\ f'(۲/۲۷۹۲) \simeq ۱۲/۵۸۴۲ \end{cases}$$

$$a_۴ = ۲/۲۷۹۲ - \frac{۰/۰۰۲۲}{۱۲/۵۸۴۲} = ۲/۲۷۹۱$$

پس ریشهٔ تقریبی اضافی معادله می‌شود: $x \simeq ۲/۲۷۹۱$

تبصره- بعضی مواقع ریشه‌های تقریبی یك معادله‌را مشترکاً از روش‌وترها ومماسها که‌یکی **تقریبی نقصانی ودیگری اضافی‌است تعیین می‌کنند و به ریشهٔ واقعی‌معادله بیشترنزدیك می‌شوند** که از ذکر آن خود داری می‌شود.

۲-۲۰- روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم- هرگاه معادلـهٔ درجهٔ سوم

$$ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$$

دارای ریشه‌هـای حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ باشد چند جمله‌ای $ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ بـر $(x - x_۱)$ و $(x - x_۲)$ و $(x - x_۳)$ بخش پذیر است وداریم:

$$a(x - x_۱)(x - x_۲)(x - x_۳) \equiv ax^۳ + bx^۲ + cx + d$$

باساده‌کردن طرف اول ومتحدکردن دو طرف خواهیم داشت:

$$a[x^۳ - (x_۱ + x_۲ + x_۳)x^۲ + (x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۱)x - x_۱x_۲x_۳] = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = -\frac{b}{a} \\ x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۱ = \frac{c}{a} \\ x_۱ \cdot x_۲ \cdot x_۳ = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

مثال- روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3 - 5x + 2 = 0$ عبارتنداز.

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -5$ و $x_1x_2x_3 = -2$

تمرین

معلوم‌کنید هریك از معادله‌های زیر چندریشه دارد. سپس مقدار تقریبی ریشه‌های هر معادله را با ۰/۱ تقریب بدست‌آورید.

۱) $x^3 - 3x^2 + 12 = 0$ ۲) $x^3 - 3x^2 - 12 = 0$

۳) $x^3 + 2x - 5 = 0$ ۴) $x^3 + 3x^2 - 9x + 3 = 0$

۵) $x^3 - 3x + 1 = 0$ ۶) $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$

۷- معادلهٔ $x^3 - 3a^2x^2 - 9a^4x - a^6 = 0$ مفروض است.

الف- تحقیق کنید که این معادله به ازای جمیع مقادیر پارامتر a دارای سه ریشهٔ حقیقی است.

ب- روابط بین ضرایب و ریشه‌ها را بنویسید و تحقیق کنید معادلهٔ فوق همواره دارای دو ریشهٔ منفی و یك ریشهٔ مثبت است.

۸- با استفاده از روابط بین ضرایب وریشه‌های یك معادلهٔ درجه سوم دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0 \end{cases}$$

۹- معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3 - 3x^2 + 2m + 2 = 0$ مفروض است.

الف - حدود پارامتر m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ فوق دارای سه یا دو یا یك ریشهٔ حقیقی باشد.

ب- به ازای $m = 1$ و $m = -1$ ریشه‌های معادله را بدست‌آورید.

ج- به ازای $m = 2$ ریشهٔ تقریبی معادله را تا ۰/۱ تقریب نقصانی بدست آورید.

د - پارامتر m را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله دوبرابر قرینهٔ دیگری باشد.

$(x_2 = -2x_1)$

فصل ۳

دیفرانسیل و انتگرال

دیفرانسیل

۳-۱-فرض کنید که تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ معین و در نقطهٔ x_0 از $]a,b[$ دارای مشتق باشد. اگر در نقطه x_0 به x نموی به اندازهٔ Δx بدهیم، y نموی بـه اندازهٔ Δy خواهد کرد. می‌توانیم بنویسیم :

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{و} \quad \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = y - y_0$$

چون f در نقطهٔ x_0 مشتق پذیر فرض شده است داریم :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

لذاوقتی Δx را کوچکتر و کوچکتر سازیم $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ به $f'(x_0)$ نزدیکتر و نزدیکتر می‌شود، و برای Δxهای کوچك می‌توان نوشت :

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ویا

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \qquad (2)$$

اگر تفاضل $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ را β بنامیم بنا به (۱) داریم :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \beta = 0$$

و

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \beta\Delta x \qquad (3)$$

از روابط (۲) و (۳) دیده می‌شود که اگر Δy را که نمو تابع است برابر $f'(x_0)\Delta x$ اختیار کنیم خطائی به اندازهٔ $\beta\Delta x$ مرتکب خواهیم شد، واین خطا با کوچك شدن Δx کوچك خواهدشد. در حقیقت حتی خطای نسبی $\beta = \frac{\beta\Delta x}{\Delta x}$ به‌سمت‌صفر میل می‌کند.

معمولا محاسبه Δy کاری دشوار است، درحالیکه محاسبهٔ $f'(x_0)\Delta x$ بادر دستداشتن x_0 و Δx کاری ساده‌تر است وبه‌کار بردن $f'(x_0)\Delta x$ بجای Δy حجم محاسبات را کم می‌کند.

دربحث فوق اندیس ۰ را در x_0 برای بیان این منظورکه x_0 درطول بحث ثابت است بکار بردیم. البته x_0 می‌تواند هرنقطه‌ای‌که تابع‌درآن مشتق پذیراست‌باشد. وقتی‌این استنباط ایجادشد، دیگر لزومی به نوشتن اندیس ۰ نیست و می‌توان مطالب فوق را در هر نقطه x که تابع مشتق پذیراست نوشت.

توجه کنید که x و Δx به هم وابسته نیستند وبرای هر x ثابت در D_f عدد Δx می‌تواند هر مقداری باشد که $x+\Delta x\in D_f$. در این حالت رابطه (۲) بصورت زیردرمی‌آید:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x \qquad (۲)$$

واز روی آن می‌توان نوشت:

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x \qquad (۴)$$

این مطالب معمولا دریکی از دومورد زیر به‌کار می‌آیند:

۱ ـ مقدار تابعی و مقدار مشتق آن را در نقطه‌ای، مثلا x_0، می‌دانیم و می‌خواهیم در نزدیکی و مجاورت x_0 مقادیر تابع را تخمین بزنیم.

۲ـ محاسبه مقدار تابع و مشتق‌آن درنقطه‌ای،مثلا x_0،آسان هستند ولی محاسبه مقادیر تابع در نزدیکی و مجاورت x_0 پیچیده و دشوار می‌باشند و گاهی‌اوقات عملا غیر ممکن است.

مثالهای زیراین مطالب را نشان می‌دهند:

مثال ۱ - فرض‌کنیدکه دستور تابع f را نمی‌شناسیم ولی به‌طریقی‌پی برده‌ایم (مثلا ازروی منحنی نمایش f) که مقدار تابع f در نقطهٔ $x_0=۲$ برابر ۱ ـ و مقدار مشتق آن در x_0 برابر ۳ است. می‌خواهیم مقادیر f را در نزدیکی x_0 حدس بزنیم.

حل: فرض کنیدکه x نقطه‌ای نزدیك به ۲ و به صورت $۲+\Delta x$ باشد. بنابه رابطهٔ (۴) داریم:

$$f(۲+\Delta x)\approx f(۲)+f'(۲)\Delta x$$

ویا

$$f(۲+\Delta x)\approx ۵\ \Delta x-۱$$

پس مثلا مقدار تابع در ۲/۰۱و۱/۹ بطور تقریبی چنین‌اند

$$f(۲/۰۱)\approx -۰/۹۷ \text{ و } f(۱/۹)\approx -۰/۷$$

مثال ۲ - مربعی فلزی به شعاع ۱۰ متر را گرم کرده ایم و در اثر گرما اضلاع مربع به‌اندازه یك سانتیمتر بزرگ شده‌اند. مقدار تقریبی مساحت مربع را پس از گرم شدن حساب کنید.

حل : اگر $S(x)$ مساحت مربع به ضلع x باشد ، آنوقت $S(x)=x^۲$. دراین مسأله : $S'(۱۰)=۲۰$ و $S'(x)=۲x$ و $\Delta x=۰/۰۱$ و $x_۰=۱۰$ اکنون بنابه رابطهٔ(۴) داریم:

$$S(۱۰+\Delta x)\approx S(۱۰)+S'(۱۰)\Delta x=۱۰۰+۰/۲=۱۰۰/۲$$

پس مساحت مربع تقریباً به اندازهٔ ۰/۲ متر مربع زیادشده است. مقدار واقعی اضافه مساحت $۰/۲۰۰۱=۱۰۰-(۱۰/۰۱)^۲$ است که تفاوت آن با آنچه تخمین زدیم ۰/۰۰۰۱ و در نتیجه عددی کوچك است.

حال مناسب است که تعریف زیر را بنمائیم :

تعریف : فرض کنید که $y=f(x)$ تابعی مشتق پذیر از x باشد. مقدار

$$f'(x)\Delta x \qquad (۵)$$

را که درآن $x\in D_f$ و Δx عددی دلخواه و حقیقی است دیفرانسیل تابع f می‌نامند و با df یا dy نمایش می‌دهند.

اکنون تابع $y=f(x)=x$ را درنظر می گیریم . درمورد این تابع داریم $f'(x)\equiv۱$ و لذا

$$dy=dx=۱\cdot\Delta x=\Delta x$$

در نتیجه $dx=\Delta x$، یعنی دیفرانسیل متغیر مستقل بانمو آن یکی است لذا رابطهٔ (۵) در مورد دیفرانسیل تابع $y=f(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$dy=f'(x)dx \qquad (۶)$$

تبصره - فرض کنید $y=f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد. تاکنون نماد $\frac{dy}{dx}$ رابرای نشان دادن y' یا $f'(x)$ بکار برده‌ایم ، ولی هیچگاه آن را به عنوان یك کسر (که صورتش dy و مخرجش dx باشد) تعبیر نکرده‌ایم. اکنون باتعریف دیفرانسیل می‌توان چنین تعبیری برای $\frac{dy}{dx}$ نمود و آن را به عنوان یك کسر پنداشت، واین تعبیر تناقضی به بار نمی‌آورد ، زیرا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)dx}{dx}=f'(x)$$

حال به مثالهای دیگری در مورد کاربرد دیفرانسیل می‌پردازیم .

مثال ۳- فرض‌می‌کنیم $f(x)=\sin x$ باشد. پس خواهیم داشت $f'(x)=\cos x$ با درنظر گرفتن رابطهٔ تقریبی (۴) می‌توان چنین نوشت:

$$\sin(x+\Delta x)\approx\sin x+\cos x\Delta x \qquad (۷)$$

حال اگر بخواهیم مقدار تقریبی $\sin ۴۶^\circ$ را حساب کنیم اختیار می‌کنیم :

$$\Delta x = ۱^\circ = \frac{\pi}{۱۸۰} \text{ و } x = ۴۵^\circ = \frac{\pi}{۴}$$

داریم

$$۴۶^\circ = ۴۵^\circ + ۱^\circ = \frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۸۰}$$

اینک با درنظر گرفتن این مقادیر رابطهٔ (۷) چنین می‌شود:

$$\sin ۴۶^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۸۰}\right) = \sin\frac{\pi}{۴} + \cos\frac{\pi}{۴} \times \frac{\pi}{۱۸۰}$$

و از آنجا :

$$\sin ۴۶^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۰/۷۰۷۱ + ۰/۷۰۷۱ \times ۰/۰۱۷ = ۰/۷۱۹۴$$

نکتهـ اگر در فرمول (۷) فرض شود $x = ۰$ و $\Delta x = \alpha$ خواهیم داشت :

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

یعنی اگر زاویه بسیار کوچك باشد اندازهٔ آن برحسب رادیان باسینوس آن زاویه تقریباً برابر است.

همچنین اگر $f(x) = tg\, x$ آنوقت $f'(x) = \frac{۱}{\cos^۲ x}$ و رابطهٔ (۴) چنین می‌شود :

$$tg(x + \Delta x) \approx tg\, x + \frac{۱}{\cos^۲ x} \times \Delta x$$

حال اگر $x = ۰$ و $\Delta x = \alpha$ آنوقت $tg\,\alpha \approx \alpha$ شده ونتیجه می گیریم که اگر اندازهٔ زاویه‌ای بسیار کوچك باشد اندازهٔ آن برحسب رادیان با tg آن تقریباً برابر است.

در خطکش محاسبه زوایایی که اندازهٔ آنها کمتر از ۵ درجه و ۴۴ دقیقه است ، مقادیـر سینوس و تانژانت آنها با اندازهٔ خود زاویه برحسب رادیان برابر گرفته می‌شود:

$$(\sin ۵^\circ\ ,\ ۴۴' = ۰/۱)$$

مثال ۴ - اگر $f(x) = \sqrt{x}$ باشد ، از (۴) نتیجه می‌شود :

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times \Delta x$$

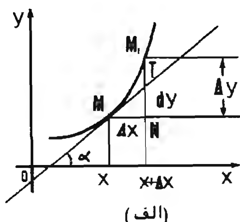
حال اگر جذر تقریبی ۱۰۵ را بخواهیم کافی است $x = ۱۰۰$ و $\Delta x = ۵$ اختیار گردد در اینحال خواهیم داشت:

$$\sqrt{۱۰۵} = ۱۰ + \frac{۱}{۲\sqrt{۱۰۰}} \times ۵ = ۱۰ + ۰/۲۵ = ۱۰/۲۵$$

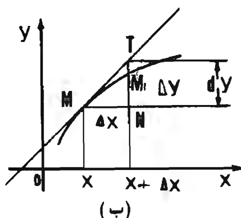
یا اگر جذر تقریبی ۹۸ را بخواهیم $x = ۱۰۰$ و $\Delta x = -۲$ اختیار شده و خواهیم داشت:

$$\sqrt{۱۰۰ - ۲} = ۱۰ + \frac{۱}{۲ \times ۱۰} \times (-۲) = ۱۰ - ۰/۱ = ۹/۹$$

۳ـ۲ـ تعبیر هندسی دیفرانسیل ــ فرض می کنیم (C) منحنی نمایش تغییرات تابع مشتق پذیر $y=f(x)$ باشد. نقطهٔ دلخواه $M(x,y)$ را روی این منحنی اختیار کرده و مماس برمنحنی در این نقطه را رسم نموده و زاویهٔ این مماس با جهت مثبت محور xها را α می‌نامیم. چون فرض بر این است که در این نقطهٔ M تابع دارای مشتق معینی است پس $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ متغیر مستقل را به اندازهٔ Δx تغییر می‌دهیم نقطهٔ نظیر $x+\Delta x$ روی منحنی نقطه M_1 می‌شود که عرضش $y+\Delta y$ است.



(الف)



(ب)

در مثلث MNT :

$$NT = MN \times tg\,\alpha$$

چون $tg\alpha = f'(x)$ و $MN=\Delta x$ است پس:

$$NT = f'(x)\cdot\Delta x$$

ولی طبق تعریف دیفرانسیل: $f'(x)\Delta x = dy$ می‌باشد، پس:

$$NT = dy$$

و از آنجا:

دیفرانسیل تابع $f(x)$ به ازای مقادیر مفروض x و Δx برابر است با نمو عرضی خط مماس درنقطه مفروض x برمنحنی $y=f(x)$

در شکل الف دیده می‌شود که: $M_1T = \Delta y - dy$

نباید تصور کرد که همواره Δy از dy بزرگتر است. به طوری که در شکل ب دیده می‌شود :

$$\Delta y = M_1N \quad و \quad dy = NT \quad و \quad \Delta y < dy$$

۳ـ۳ـ فرمولهای یافتن دیفرانسیل ـ با درنظر گرفتن رابطهٔ (۶) شماره ۳ــ۱ در زیر فرمولهای دیفرانسیل توابع مختلفی را که تا کنون دیده‌ایم یادآور می‌شویم :

۱) $d(c) = 0$

۲) $d(x)=dx$

۳) $d(u+v-w)=du+dv-dw$

۴) $d(cv)=cdv$ (c مقداری است ثابت)

۵) $d(u\cdot v)=udv+vdu$

۶) $d(u^n)=nu^{n-1}du$

۷) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$

۸) $d\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}du$ (c مقداری است ثابت)

۹) $d(\sqrt{u})=\frac{du}{2\sqrt{u}}$

۱۰) $d(\sqrt[n]{u})=\frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

۱۱) $d(\sin u)=\cos u\,du$

۱۲) $d(\cos u)=-\sin u\,du$

۱۳) $d(tg\,u)=\sec^2 u\,du \quad \left(\sec u=\frac{1}{\cos u}\right)$

۱۴) $d(cotg\,u)=-cosec^2 u\,du \left(cosec\,u=\frac{1}{\sin u}\right)$

۱۵) $d(\sec u)=\sec u\,tg\,u\,du$

۱۶) $d(cosec\,u)=-cosec\,u\,cotg\,u\,du$

تمرین

دیفرانسیل توابع زیر را محاسبه کنید:

۱) $y=3x^2-8x+9$

۲) $y=\frac{3x^2-7x-3}{2x^2+9x+3}$

۳) $y=(2x^3+8x^2-9x+8)^7$

۴) $y=\sqrt{2x^4-8x^3+5x}$

۵) $y=\sin^3 2x$

۶) $y=\cos^5\sqrt{x}$

۷) $y=tg^4\frac{1}{x}$

۸) $y=cotg^4\sqrt[3]{x^2}$

۹ــ جذر تقریبی $\sqrt{630}$ و $\sqrt{620}$ و $\sqrt{730}$ را بیابید (با استفاده از دیفرانسیل).

۱۰ــ به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی $tg46^\circ$ و $\cos46^\circ$ و $\sin76^\circ$ و $tg23^\circ$ را بیابید.

درستی روابط زیر را ثابت کنید.

۱۱) $$d\left[(21x^2-24x+32)\sqrt[4]{(x+1)^3}\right]=\frac{231x^2dx}{4\sqrt[4]{x+1}}$$

۱۲) $$d[\sin x\cos x(2\cos^2x+3)+3x]=8\cos^4x\,dx$$

۱۳ــ نخست ثابت کنید که $d(arctgx)=\frac{dx}{1+x^2}$ سپس درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید:

$$d[x\,arctgx]=arctgx\,dx+\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$d(2x^3arctgx-x^2]=6x^2arctgx\,dx-\frac{2x}{1+x^2}dx$$

۱۴ــ نخست ثابت کنید $d(\arcsin u)=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ سپس درستی روابط زیر را ثابت کنید:

الف $d(\arcsin 2x\sqrt{1-x^2})=d(2\arcsin x)$

ب $d\left(arctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)=d\left(\arccos x\right)$

ج $d\left(\frac{x}{1+x^2}+arctgx\right)=\frac{2dx}{(1+x^2)^2}$

انتگرال نامعین

۴ــ ۴ــ پیشگفتار ــ در گفتارهای پیشین با مسایلی از این قبیل روبرو بودیم:

الف ـ تابعی مانند $F(x)$ مفروض است، مشتق این تابع یعنی $f(x)=F'(x)$ را بیابید.

ب ـ معادله یك منحنی $y=F(x)$ است. معادلهٔ ضریب زاویه‌ایهـای مماسهای این منحنی یعنی:

$$\frac{dy}{dx}=F'(x)=f(x)$$

را بیابید. در این گفتار با مسئلهٔ وارون این اعمال روبرو هستیم. یعنی در این مبحث معادله ضریب زاویه‌ایهای مماسهای برمنحنی را می‌دهند و معادلهٔ منحنی را می‌خواهند. یا، مشتق یك تابع را می‌دهند وخود تابع را طلب می‌کنند.

۳ـ ۵ ـتعریف تابع اولیه - تابع $F(x)$ را یك تابع اولیهٔ تابع $f(x)$ در فاصلهٔ I گویند هرگاه درجمیع نقاط I رابطهٔ $F'(x)=f(x)$ برقرار باشد.

مثال ۱- تابع $F(x)=x^۴$ تابع اولیهٔ $f(x)=۴x^۳$ است زیرا:

$$\frac{d(x^۴)}{dx}=۴x^۳$$

مثال ۲- تابع $F(x)=\cos x$ تابع اولیهٔ $f(x)=-\sin x$ است زیرا:

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

مثال ۳ - تابع $f(x)=۳x^۲+۴x$ معادلهٔضریب زاویه‌ای‌های‌مماسهای‌برمنحنی‌نمایش تابع $F(x)=x^۳+۲x^۲$ می‌باشد، زیرا:

$$\frac{d}{dx}(x^۳+۲x^۲)=۳x^۲+۴x$$

به آسانی دیده می‌شودکه اگر $f(x)$ یك تابع اولیه داشته باشد، آنگاه تابع اولیه‌های زیادی دارد. مثلاً در مثال ۱ توابع $F(x)=x^۴+۱$ و $F(x)=x^۴-۱$ و $F(x)=x^۴+۵$ و **بطورکلی $F(x)=x^۴+c$ همگی‌تابع‌اولیه‌های مختلف $f(x)=۴x^۳$ می‌باشند، واختلاف آنها درعددی ثابت‌می‌باشد.** یعنی اگر $f(x)$و$\Phi(x)$ دوتابع‌اولیه‌ی $f(x)$ باشند، $F(x)-\Phi(x)=c$ می‌باشد.

زیرا طبق تعریف: $F'(x)=f(x)$ و $\Phi'(x)=f(x)$

و از آنجا: $f'(x)-\Phi'(x)\equiv ۰$

اما ثابت می‌کنندکه : هرگاه مشتق تابعی روی یك فاصله متحد صفرباشد، آنگاه آن تابع روی آن فاصله ثابت است.

پس باید $F(x)-\Phi(x)$ برابر مقدار ثابتی باشد تا مشتق آن یعنی $F'(x)-\Phi'(x)$ متحد صفر گردد.

مسأله یافتن تابعی که مشتق‌آن $f(x)$ باشد ومسأله یافتن تابعی که دیفرانسیل آن $f(x)dx$ باشد هردو یکی هستند وجوابهای آنها مانند هم است. ازاین روی میتوان عمل تابع اولیه گرفتن را عکس عمل دیفرانسیل‌گیری نیز دانست. برای مشتق و دیفرانسیل تابع f به ترتیب نمادهای $f'(x)$ و $f'(x)dx$ را به کاربرده‌ایم؛ ونمادی‌که برای عکس این اعمال به‌کار برده می‌شود $\int f(x)dx$ می‌باشدکه «انتگرال $f(x)dx$» یا بطور مختصر «انتگرال f» خوانده می‌شود و آن هریك ازتوابع اولیه f است. این نماد انتگرال نامعین نیز نامیده می‌شود (واژه نامعین درمقابل واژه معین در مورد انتگرال بکار برده می‌شود، که بعداً تقریباً باآن‌آشنا خواهید شد.)طبق‌تعریف نماد $\int f(x)dx$ داریم:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$$

و

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$$

واگر F یك تابع اولیهٔ f باشد آنوقت

$$\int dF=\int f(x)dx=F(x)+C$$

هدف ما دراین بخش یافتن انتگرال برخی از توابعی است‌که دراین کتاب خوانده‌ایم. البته لازم به تذکر است‌که انتگرال (یا تابع اولیهٔ) هرتابعی را نمی‌توان به دست‌آورد.

نخستین فرمولی‌که درباره انتگرالگیری توابع ارائه می‌دهیم عبارت است از:

$m\neq -1$ عددی است گویا ، $\displaystyle\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+c$

برای اثبات درستی‌فرمول بالاکافی است از $\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ دیفرانسیل بگیریم وببینیم که برابر $x^m dx$ می‌شود.

مثال۱- تعیین تابع اولیه $f(x)=x^5$.

طبق فرمول خواهیم‌داشت

$$\int x^5dx=\frac{x^{5+1}}{5+1}+c=\frac{1}{6}x^6+c$$

مثال۲- تابع اولیهٔ $y=\sqrt[5]{x^3}$ می‌شود:

$$\int \sqrt[5]{x^3}dx \qquad \int x^{\frac{3}{5}}dx=\frac{x^{1+\frac{3}{5}}}{1+\frac{3}{5}}+c=\frac{x^{1+\frac{3}{5}}}{\frac{8}{5}}+c=\frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}+c$$

مثال۳- تابع اولیهٔ $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ می‌شود:

$$\int\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}dx=\int x^{\frac{-3}{5}}dx=\frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1}+c=\frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}}+c=\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}+c$$

مثال۴- تعیین تابع اولیهٔ $f(x)=\frac{1}{x^5}$

$$\int\frac{1}{x^5}dx=\int x^{-5}dx=\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+c=\frac{x^{-4}}{-4}+c=\frac{-1}{4x^4}+c$$

مثال۵- محاسبهٔ انتگرال $f(x)=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}}$

$$\int\frac{x^3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}}dx=\int x^3\times x^{\frac{2}{3}}\times x^{-\frac{3}{5}}dx$$

$$=\int x^{\frac{46}{15}}dx=\frac{x^{\frac{46}{15}+1}}{\frac{46}{15}+1}+c=\frac{15}{61}x^{4+\frac{1}{15}}+c=\frac{15}{61}x^4\sqrt[15]{x}+c$$

تمرین

تابع اولیهٔ توابع زیر را نسبت به x بیابید.

۱) $f(x)=x$

۲) $f(x)=x^2+3x$

۳) $f(x)=\frac{1}{x^8}$

۴) $f(x)=\sqrt[9]{x^4}$

۵) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{x^4}}$

۶) $f(x)=\frac{x^4\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$

از تساویهای زیر y را محاسبه کنید:

۷) $\frac{dy}{dx}=3ax^2$

۸) $\frac{dy}{dx}=3x^3$

۹) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^3-3x+4}{x^3}$ ۱۰) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(1+x^2)(1-2x^2)}{x^2}$

۱۱ـ ضریب زاویه‌ای خطی که از نقاط $A(-4,5)$ و $B(2,6)$ می‌گذرد چقدراست؟ معادلهٔ این خط را بااستفاده از انتگرال بیابید.

۱۲ـ یك منحنی ازنقطهٔ $A(2,5)$ می‌گذرد و معادلهٔ ضریب زاویه‌ای آن $3x^2-\dfrac{1}{x^2}$ است. معادلهٔ منحنی را بیابید.

۳ـ ۶ـ چند فرمول دیگر برای انتگرال گیری

۱ـ انتگرال مجموع یا تفاضل چند جملهٔ جبری برابر است با مجموع یا تفاضل انتگرالهای یکایك آن جمله‌ها یعنی:

$$(1)\quad \int(du+dv-dw)=\int du+\int dv-\int dw$$

در رابطهٔ بالا u و v و w تابعهایی از متغیر مستقل مانند x می‌باشند

۲ـ a عددی است ثابت $\quad (2)\quad \int a\,dv=a\int dv$

۳ـ n عددی است گویا $n+1\neq 0$ و $\quad (3)\quad \int u^n du=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+c$

اینك طی چند مثال زیر طرز یافتن انتگرال برخی از تابعها را به‌کمك دستورهای بالانشان می‌دهیم:

مثال ۱ ـ محاسبهٔ :

$$\int 24(3x+4)^7dx$$

فرض می‌کنیم $3x+4=u$ ازآنجا خواهیم داشت:

$$3dx=du \Rightarrow dx=\frac{1}{3}du$$

درنتیجه:

$$\int 24(3x+4)^7dx=\int 24u^7\times\frac{1}{3}du$$

$$=\frac{1}{3}24\int u^7\times du=8\,\frac{u^{7+1}}{7+1}+c=u^8+c$$

باقرار دادن مقدار u خواهیم داشت:

$$\int 24(3x+4)^7=(3x+4)^8+c$$

مثال ۲ ـ محاسبهٔ :

$$\int\frac{24dx}{(-3x+6)^9}$$

فرض می‌کنیم $u=۶+۳x-$ از آنجا خواهیم‌داشت:

$$-۳dx=du \quad dx=-\frac{۱}{۳}du$$

$$\int\frac{۲۴dx}{(-۳x+۶)^{۹}}=\int\frac{۲۴\,(-\frac{۱}{۳}du)}{u^{۹}}=\int\frac{-۸du}{u^{۹}}$$

$$=-۸\int u^{-۹}du=-۸\times\frac{u^{-۹+۱}}{-۹+۱}+c=u^{-۸}+c=\frac{۱}{u^{۸}}+c$$

واز آنجا:

$$\int\frac{۲۴dx}{(-۳x+۶)^{۹}}=\frac{۱}{(-۳x+۶)^{۸}}+c$$

مثال ۳ - محاسبهٔ :

$$\int\frac{۱۴dx}{۵\sqrt[۵]{(۷x-۴)^{۳}}}$$

فرض می‌کنیم $u=۴-۷x$ از آنجا:

$$۷dx=du \implies dx=\frac{۱}{۷}du$$

$$\int\frac{۱۴dx}{۵\sqrt[۵]{(۷x-۴)^{۳}}}=\int\frac{۱۴\times\frac{۱}{۷}du}{۵\sqrt[۵]{u^{۳}}}=\int\frac{۲}{۵}u^{\frac{-۳}{۵}}du$$

$$=\frac{۲}{۵}\times\frac{u^{-\frac{۳}{۵}+۱}}{-\frac{۳}{۵}+۱}+c=\frac{۲}{۵}\times\frac{u^{\frac{۲}{۵}}}{\frac{۲}{۵}}+c=\sqrt[۵]{u^{۲}}+c$$

سرانجام :

$$\int\frac{۱۴dx}{۵\sqrt[۵]{(۷x-۴)^{۳}}}=\sqrt[۵]{(۷x-۴)^{۲}}+c$$

مثال ۴- محاسبه :

$$\int\frac{(x+۳)dx}{\sqrt{x^{۲}+۶x+۷}}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt{x^{۲}+۶x+۷}=u$ از آنجا :

$$x^{۲}+۶x+۷=u^{۲} \implies (۲x+۶)dx=۲udu$$

$$(x+۳)dx=udu$$

$$\int \frac{(x+۳)dx}{\sqrt{x^۲+۶x+۷}} = \int \frac{udu}{u} = \int du = u+c$$

سرانجام :

$$\int \frac{(x+۳)dx}{\sqrt{x^۲+۶x+۷}} = \sqrt{x^۲+۶x+۷}+c$$

مثال ۵ - محاسبهٔ :

$$\int \frac{x^۲dx}{\sqrt{۱-x}}$$

فرض می‌کنیم $u=\sqrt{۱-x}$ از آنجا خواهیم داشت :

$$۱-x=u^۲ \Rightarrow x=۱-u^۲ \Rightarrow dx=-۲udu$$

$$\int \frac{x^۲dx}{\sqrt{۱-x}} = \int \frac{(۱-u^۲)^۲(-۲udu)}{u}$$

$$= \int (-۲+۴u^۲-۲u^۴)du = -۲u+\frac{۴}{۳}u^۳-\frac{۲}{۵}u^۵+c$$

$$= -u(۲-\frac{۴}{۳}u^۲+\frac{۲}{۵}u^۴)+c$$

$$= -u \times \frac{۳۰-۲۰u^۲+۶u^۴}{۱۵}+c$$

$$= -\frac{۲}{۱۵}u(۱۵-۱۰u^۲+۳u^۴)+c$$

سرانجام :

$$\int \frac{x^۲dx}{\sqrt{۱-x}} = -\frac{۲}{۵}\sqrt{۱-x}[۱۵-۱۰(۱-x)+۳(۱-x)^۲]+c$$

$$= -\frac{۲}{۵}\sqrt{۱-x}\;(۸+۴x+۳x^۲)+c$$

مثال ۶ - محاسبهٔ :

$$\int (x^۳-۲x^۲+x+۵)(x-۲)^{۱۰۰}dx$$

فرض می‌کنیم $u=x-۲$ از آنجا خواهیم داشت :

$$x=u+۲ \Rightarrow dx=du$$

$$x^۳-۲x^۲+x+۵=(u+۲)^۳-۲(u+۲)^۲+(u+۲)+۵=$$

$$u^۳+۶u^۲+۱۲u+۸-۲u^۲-۸u-۸+u+۲+۵=$$

$$u^3+4u^2+5u+7$$

$$\int(x^3-2x^2+x+5)(x-2)^{100}dx=\int(u^3+4u^2+5u+7)u^{100}du$$

$$=\int u^{103}du+4\int u^{102}du+5\int u^{101}du+7\int u^{100}du$$

$$=\frac{u^{104}}{104}+4\frac{u^{103}}{103}+5\frac{u^{102}}{102}+7\frac{u^{101}}{101}+c$$

سرانجام:

$$\int(x^3-2x^2+x+5)(x-2)^{100}=\frac{1}{104}(x-2)^{104}+\frac{4}{103}(x-2)^{103}$$

$$+\frac{5}{102}(x-2)^{102}+\frac{7}{101}(x-2)^{101}+c$$

تمرین

انتگرالهای زیررا حساب کنید :

۱) $\int(-9x+8)^6dx$

۲) $\int\frac{dx}{(-9x+8)^6}$

۳) $\int\sqrt{(4x-3)^2}\,dx$

۴) $\int\frac{dx}{\sqrt[7]{(-3x+1)^5}}$

۵) $\int(4x^3+8x)\sqrt{x^4+4x^2}\,dx$

۶) $\int\frac{(-12x+16)dx}{\sqrt[7]{(-3x^2+8x+9)^5}}$

۷) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{2-x}}$

درستی روابط زیررا ثابت کنید :

۸) $\int\sqrt[7]{x^3}\,dx=\frac{7}{10}x\sqrt[7]{x^3}+c$

۹) $\int x^9\sqrt[7]{x^3}\,dx=\frac{7}{73}x^{10}\sqrt[7]{x^3}+c$

۱۰) $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{(3x-1)^5}} = \frac{7}{6}\sqrt[7]{(3x-1)^2} + c$

۱۱) $\int \frac{(3x+5)dx}{(x-2)^7} = \frac{-3}{5(x-2)^5} - \frac{11}{6(x-2)^6} + c$

۱۲) $\int (-2x+1)\sqrt[9]{(-x^2+x)^5}dx =$

$$\frac{9}{14}(-x^2+x)\sqrt[9]{(-x^2+x)^5} + c$$

۱۳) $\int (3x+1)(x-2)^{50}dx = \frac{3}{52}(x-2)^{52} + \frac{7}{51}(x-2)^{51} + c$

۱۴) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3 + c$

۱۵) $\int \frac{x^2dx}{(x^3-1)^5} = \frac{-1}{12(x^3-1)^4} + c$

۱۶) $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx = -\frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{x})^3}{3} + c$

۱۷) $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^3+3x}} = \frac{2\sqrt{x^3+3x}}{3} + c$

۱۸) $\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}dx = \frac{2(a+bx^n)^{\frac{3}{2}}}{3nb} + c$

۱۹) $\int \frac{t^2dt}{(a+bt^3)^3} = -\frac{1}{6(a+bx^3)^2} + c$

۲۰) $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{3}(x+4)\sqrt{1+x} + c$

۳-۷- مقدار ثابت انتگرال-در پیشگفتار این مبحث ، دیدیم که یك تابع دارای بینهایت انتگرال یا تابع اولیه است که اختلاف آنها در عدد ثابت انتگرالگیری می‌باشد و بهمین‌جهت نوشتیم :

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

این مقدار ثابت یعنی c بادردست‌داشتن برخی اطلاعات در مورد تابع قابل محاسبه است . به

مثال زیر توجه کنید:

مثال - مشتق تابعی برابر است با:

$$\frac{dy}{dx}=12x^3+21x^2-18x+8$$

مطلوب است یافتن این تابع درصورتی که بدانیم مقدار این تابع به‌ازای $x=1$ برابر صفر است.

حل- چون:

$$\frac{dy}{dx}=12x^3+21x^2-18x+8$$

از آنجا:

$$dy=(12x^3+21x^2-18x+8)dx$$

در نتیجه:

$$y=\int(12x^3+21x^2-18x+8)dx$$

پس:

$$y=3x^4+7x^3-9x^2+8x+c$$

طبق صورت مسئله به‌ازای $x=1$ خواهیم داشت $y=0$ در نتیجه:

$$0=3+7-9+8+c \implies c=-9$$

سرانجام:

$$\boxed{y=3x^4+7x^3-9x^2+8x-9}$$

۳-۸- تعبیر هندسی عدد ثابت انتگرال - این تعبیر را با ذکر مثال زیر تفسیر می‌کنیم.

مثال - مطلوب‌است تابعی که درهر نقطهٔ منحنی نمایش آن معادلهٔ ضریب زاویه‌ای مماس برمنحنی $2x$ باشد.

حل - چون $\frac{dy}{dx}=2x$، پس:

$$dy=2xdx$$

و از آنجا:

$$y=\int 2xdx=x^2+c$$

حال اگر به‌جای c اعداد مختلف مانند ۲ و ۱ و ۰ و ۱- و ۲- قرار دهیم‌خواهیم داشت:

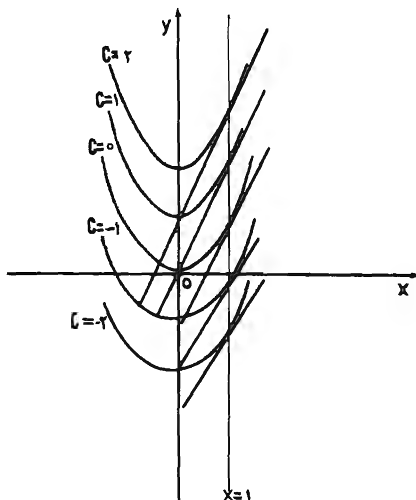
$$c=2 \implies y=x^2+2$$

$$c=1 \implies y=x^2+1$$

$c=0 \Rightarrow y=x^2$

$c=-1 \Rightarrow y=x^2-1$

$c=-2 \Rightarrow y=x^2-2$



این توابع مختلف متعلق به یک‌خانواده از سهمی ها هستند که محور yها را به ترتیب درنقاطی به عرض ۲ و ۱و ۰ و ۱ — و ۲ — قطــع می‌کنند و به‌ازای یك مقدار ثابت بــرای x ضریب زاویه‌ایهای مماس همگی‌آنها ثابت است. مثلا به‌ازای ۱ = x ضریب زاویهٔ مماس تمامی آنها ۲ است. اگر در این مثال‌اطلاعات دیگری‌داشته باشیم می‌توانیم عدد ثابت و تابع مربوطه را حساب کنیم . مثلاً اگر بدانیم به ازای ۱ = x، مقدار y عدد ۳ است به دست می‌آوریم :

$3=1+c \Rightarrow c=2$

ودر نتیجه $y=x^2+2$:

تمرین

هریك از عبارتهای زیر دیفرانسیل تابعی می‌باشند . ایـن تابعها را با اطلاعات داده شده بیابید .

مقدار y نظیر	مقدار متغیر	دیفرانسیل
۵	۲	۱) $(۲x-۴)dx$
c	۰	۲) $(۲ax+b)dx$
۰	۴	۳) $(\sqrt{t}+\frac{۱}{\sqrt{t}})dt$
۸	۵	۴) $(\sqrt{۳s+۱})ds$
۰	۱	۵) $(-۴x^۳+۸x-۳)dx$

(۶) ـ مشتق تابعی در نقطهٔ (x,y) برابر $\frac{x+۱}{y+۱}$ است. در صورتی که به ازای $x=۰$ مقدار این تابع ۱ باشد ، این تابع را بیابید.

جواب : $(y+۱)^۲=(x+۱)^۲+۳$

(۷) ـ مشتق تابعی در نقطهٔ (x,y) برابر $\frac{۴-x}{۲y-۳}$ است درصورتی که به ازای $x=۱$ مقدار این تابع برابر ۲ باشد این تابع را بیابید .

جواب : $۲(x-۴)^۲+(۲y-۳)^۲=۱۹$

(۸) ـ درصورتی که $\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$ باشد مقدار y را بیابید ، درصورتی که بدانیم به‌ازای $x=۳$ خواهیم داشت $y=۴$

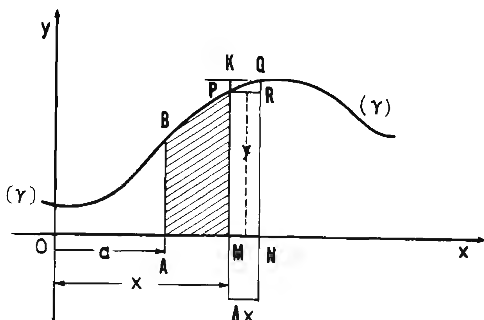
جواب : $x^۲+y^۲=۲۵$

(۹) ـ مشتق‌تابعی $\sqrt{۳x}-x^۴$ است . مطلوب است این تابع در صورتی که به ازای $x=۳$ داشته باشیم $y=۲$

(۱۰) ـ مشتق‌تابعی $\frac{۳x+۴}{\sqrt{۲x+۱}}$ است . مطلوب است این تابع در صورتی که به ازای $x=۴$ داشته‌باشیم $y=۱$

انتگرال معین

تا کنون هرچه انتگرال دیده‌ایـم ، اصطلاحاً «انتگرال‌نامعین» نامیده می‌شونـد . اینك از انتگرالهایی گفتگو خواهیم کرد که آنها را «انتگرال معین» خواهیم نامید . دلیل این نامگذاری **را درپایان‌این‌گفتار خواهیدیافت.انتگرال معین مفهومی‌است اساسی درریاضی وفیزیك‌ومکانیك‌و** سایر رشته‌های علوم.



۳–۹– سطح زیر منحنی – فرض می‌کنیم منحنی (γ)نمایش هندسی تابع پیوسته و غیر منفی $y=f(x)$ در فاصله‌ای باشد. فرض کنید که AB عرض نقطهٔ ثابتی از این منحنی درنقطه‌ای به‌طول a وPM عرض متغیری از نقطهٔ متغیر P واقع برمنحنی باشد، سطح محصور بین خطوط AB و AM و MP وقوس $\widehat{BP}$ از منحنی را S می‌نامیم . حال اگر x نمو کوچکی مانند Δx اختیار کند، ΔS، یعنی نمو سطح، سطح محصور بین خطوط PM و MN و NQ و قوس $\widehat{PQ}$ ازمنحنی است. طبق شکل بالا می‌توان چنین نوشت:

$$\text{سطح } MNRP < \text{سطح } MNPQ < \text{سطح } MNQK$$

و ازآنجا:

$$(1)\ MP\times\Delta x<\Delta S<NQ\times\Delta x$$

(توجه : دراین شکل MP و NQ به ترتیب عرضهای می‌نیمم و ماکزیمم مطلق‌تابع f روی فاصلهٔ $[x,x+\Delta x]$ می‌باشند . درحالت کلی برای آن که رابطه‌ای نظیر (۱) برقرار باشد باید مستطیل داخلی را به ارتفاع می‌نیمم مطلق تابع روی $[x,x+\Delta x]$ و مستطیل بیرونی را به ارتفاع ماکزیمم مطلق‌تابع روی $[x,x+\Delta x]$ اختیار کرد.)

طرفین‌نامساوی مضاعف بالا را بر Δx تقسیم می‌کنیم (طبق‌شکل $\Delta x>0$ است‌و تقسیم برΔx جهت نامساوی را تغییرنمی‌دهد) :

$$MP<\frac{\Delta S}{\Delta x}<NQ$$

حال Δx را به‌سوی صفر میل می‌دهیم . چون MP ثابت است عرض QN به سوی MP

نزدیك می‌شود(زیرا y تابعی است پیوسته). درنتیجه خواهیم داشت :

$$\lim_{\Delta x \to 0^+}\left(\frac{\Delta S}{\Delta x}\right)=y(=MP)$$

به همین ترتیب می‌توان برای حالت $\Delta x<0$ بحث را دنبال کرد و به دست آورد که :

$$\lim_{\Delta x \to 0^-}\left(\frac{\Delta S}{\Delta x}\right)=y=(MP)$$

یعنی : $\frac{ds}{dx}=y$ وازآنجا $dS=ydx$ وسرانجام : $S=\int ydx$

لذا می‌توان قضیه زیر را بیان کرد :

۳ــ۱۰ــ قضیهــ فرض کنید کـه تابع f در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و غیرمنفی باشد و $a\leqslant t\leqslant b$. فرض کنید $S(t)$ مساحت سطح محصور به منحنی نمایش f ومحور x ها و خطوط $x=a$ و $x=t$ باشد. آنوقت مشتق تابع S در هر نقطه برابر f است یعنی

$$S'(x)=f(x) \qquad \forall x\in[a,b]$$

حال فرض می کنیم که: $\int f(x)dx=F(x)+c$

هنگامی که x برابر a اختیار شود سطح صفر است و لذا خواهیم داشت:

$$0=F(a)+c$$

وازآنجا: $c=-F(a)$

حال اگر xرا b اختیار کنیم و$F(b)-F(a)$ را بـا $[F(x)]_a^b$ نشان‌دهیم، سطح مربوط برابر خواهد بود با:

$$S(b)=F(b)+c=F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b$$

یعنی :

۳ــ۱۱ــ قضیهــ فرض کنیدکه F تابع اولیه‌ای برای تابع پیوسته و غیرمنفی f باشد. سطح‌محصور بین منحنی‌نمایش تغییرات‌تابع $y=f(x)$ومحورxهــا و دوخط به معادلهٔ $x=a$و$x=b$(بفرض$b>a$) برابر است با:

$$\boxed{S=F(b)-F(a)}$$

مرسوم است که عدد $S=F(b)-F(a)$ را به شکل:

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

بنویسند و آن را چنین قرائت کنند:

« انتگرال $f(x)dx$ از a تا b »

واضح است که حاصل $\int_a^b f(x)dx$ عددی است معین و معلوم و به‌همین دلیل انتگرالهایی

نظیر: $\int_a^b f(x)dx$

را انتگرال معین و سایر انتگرالها را نامعین نامگذاری می‌کنند. a و b را حدود انتگرال معین می گویند .لازم به تذکراست که مفهوم کلی انتگرال معین و انتگرال گیری چیز دیگری‌است ودر آن‌لازم‌نیست‌تابع موردبحث پیوسته یاغیرمنفی باشد . مفهوم‌انتگرال معین را دردرسهای عالی‌تر ریاضی مورد بحث قرار می‌دهند وچیزی‌که مادراینجا به عنوان مساحت زیر منحنی یك تابع غیر منفی و پیوسته مورد بحث قرار دادیم به حالت خاصی از انتگرال معین ارتباط پیدا می‌کند ومقدار مساحت در این حالت همان انتگرال معین تابع خواهد شد.

عدد ثابت در محاسبهٔ انتگرالهای معین از بین میرود ، زیرا :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)+c\Big]_a^b=F(b)+c-F(a)-c=F(b)-F(a)$$

وبه همین دلیل درمحاسبات انتگرالهای معین عدد ثابت انتگرالگیری را نمی‌نویسند .

مثال - مطلوب است محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=-x^۲+۵x$ ومحورxها وخطوط $x=۱$ و $x=۴$

طبق گفتار بالا خواهیم داشت:

$$S=\int_۱^۴(-x^۲+۵x)dx=\Big[-\frac{x^۳}{۳}+\frac{۵x^۲}{۲}\Big]_۱^۴$$

$$=\Big(\frac{-۶۴}{۳}+\frac{۸۰}{۲}\Big)-\Big(-\frac{۱}{۳}+\frac{۵}{۲}\Big)=\frac{-۶۳}{۳}+\frac{۷۵}{۲}=-۲۱+\frac{۷۵}{۲}=\frac{۳۳}{۲}$$

یادآوری- در گفتارهای بعد مطالب بیشتری در مورد محاسبهٔ سطح زیر منحنی و حجم حاصل از دوران منحنی حول محورxها بیان خواهیم داشت. دراین گفتار فقط به این مطلب اشاره می‌کنیم که اگر برای محاسبهٔ انتگرال معین به تغییر متغیر نیازمند شدیم باید حدود انتگرالگیری را نیز تغییر دهیم. (البته این مطلب احتیاج به اثبات دارد ولی ما در اینجا آن

را بدون اثبات می‌پذیریم).

مثال ـ محاسبهٔ:

$$\int_0^3 \frac{(x-2)dx}{\sqrt{5x+1}}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt{5x+1}=u$ باشد. درنتیجه:

$$5x+1=u^2 \Rightarrow 5dx=2udu \Rightarrow dx=\frac{2}{5}udu$$

$$x-2=\frac{u^2-1}{5}-2=\frac{u^2-11}{5}$$

$$x=3 \Rightarrow u=\sqrt{5x+1}=\sqrt{15+1}=4$$

$$x=0 \Rightarrow u=\sqrt{0+1}=1$$

سرانجام:

$$x=3\Rightarrow u=\sqrt{15+1}=4$$

$$\int_0^3 \frac{(x-2)dx}{\sqrt{5x+1}}=\int_1^4 \frac{\frac{u^2-11}{5}\times\frac{2}{5}udu}{u}=\frac{2}{25}\int_1^4(u^2-11)du$$

$$=\frac{2}{25}\left[\frac{u^3}{3}-11u\right]_1^4=\frac{2}{25}\left[\frac{64}{3}-44-\left(\frac{1}{3}-11\right)\right]$$

$$=\frac{2}{5}(-12)=\frac{-24}{5}$$

تمرین

انتگرالهای معین زیررا حساب کنید.

۱) $\int_2^6(3x^3+4x^2-2x+1)dx$

۲) $\int_1^2 x^5dx$

۳) $\int_1^6(4x^4-3)dx$

۴) $\int_{1}^{2}(x^2+1)^5 \times 2x dx$

۵) $\int_{0}^{2}(x^3+2)\times 3x^2 dx$

۶) $\int_{0}^{2}\frac{(8x-3)dx}{\sqrt{4x+1}}$

۷) $\int_{0}^{7}\frac{(x+3)dx}{\sqrt{x+9}}$

انتگرال تابعهای مثلثاتی

۳-۱۲- فرمولهای اصلی- با توجه به فرمولهای مشتق‌گیری از تابعهای مثلثاتی داریم:

$$d(\cos u)=-\sin u\cdot du$$

$$d(\sin u)=\cos u\cdot du$$

$$d(tg u)=\sec^2 u\cdot du=\frac{du}{\cos^2 u}=(1+tg^2 u)du$$

$$d(cotg u)=-\mathrm{cosec}^2 u\cdot du=\frac{-du}{\sin^2 u}=-(1+cotg^2 u)du$$

از این فرمولها به‌ترتیب نتیجه خواهد شد:

(۱) $\int \sin u\cdot du=-\cos u+c$

(۲) $\int \cos u\cdot du=\sin u+c$

(۳) $\int\frac{du}{\cos^2 u}=\int \sec^2 u\cdot du=\int(1+tg^2 u)du=tg u+c$

(۴) $\int\frac{du}{\sin^2 u}=\int \mathrm{cosec}^2 u\cdot du=\int(1+cotg^2 u)du=-cotg u+c$

از این فرمولها در انتگرال‌گیری بسیاری از تابعهای مثلثاتی استفاده می‌شود. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱ - محاسبهٔ:

$$I=\int \sin 3x dx$$

فرض می‌کنیم $3x=u$ ازآنجا $3dx=du$، یعنی $dx=\frac{1}{3}du$. در نتیجه:

$$I=\int \sin u \times \frac{1}{3}du=\frac{1}{3}\int \sin u\,du=\frac{1}{3}(-\cos u)+c$$

$$\int \sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}\cos 3x+c$$

مثال ۲ - محاسبه :

$$I=\int 2\cos 2x\,dx$$

فرض می‌کنیم $2x=u$. ازآنجا : $2dx=du$ و $dx=\frac{1}{2}du$:

$$I=\int 2\cos 2x\,dx=\int 2\cos u \times \frac{1}{2}du=\int \cos u\,du=\sin u+c$$

$$\int 2\cos 2x\,dx=\sin 2x+c$$

مثال ۳- محاسبهٔ:

$$I=\int 4(1+tg^2 4x)dx$$

فرض می‌کنیم $4x=u$. ازآنجا $dx=\frac{1}{4}du$ ودرنتیجه:

$$I=\int 4(1+tg^2 u)\times \frac{1}{4}du=\int (1+tg^2 u)du=tg\,u+c$$

$$\int 4(1+tg^2 4x)dx=tg\,4x+c$$

مثال۴- محاسبهٔ :

$$I=\int \frac{-9dx}{\sin^2 3x}$$

فرض می‌کنیم $3x=u$. ازآنجا $dx=\frac{1}{3}du$. یعنی:

$$I=\int \frac{-9\times \frac{1}{3}du}{\sin^2 u}=-3\int \frac{du}{\sin^2 u}=+3\times cotg\,u+c$$

$$I=3cotg\,3x+c$$

مثال۵- محاسبهٔ: $I=18\int \sin^5 x\cos x\,dx$

فرض می‌کنیم $\sin x=u$ درنتیجه $\cos x\,dx=du$ می‌شود وازآنجا:

$$I=18\int u^5du=18\times \frac{u^{5+1}}{5+1}+c=3u^6+c$$

$$I=3\sin^6 x+c$$

مثال۶- محاسبهٔ: $I=\int \sin^5 x dx$

نخست یادآور می‌شویم که دراین قبیل مسائل اگر توان $\sin x$ فرد باشد روش زیر را می‌توان بکار برد و اگر توان آن زوج باشد باید روش دیگری درپیش گرفت.

$$I=\int \sin^5 x dx=\int \sin^4 x \times \sin x dx=\int (1-\cos^2 x)^2 \times \sin x dx$$
$$=\int \sin x(1+\cos^4 x-2\cos^2 x)dx$$
$$=\int \sin x dx+\int \cos^4 x \sin x dx-2\int \cos^2 x \sin x dx$$
$$=-\cos x+c_1+\int \cos^4 x \sin x dx-2\int \cos^2 x \sin x dx$$

اینك فرض می‌کنیم $\cos x=u$ باشد در نتیجه خواهیم داشت $-\sin x dx=du$ و ازآنجا:

$$\int \cos^4 x \sin x dx=\int u^4(-du)=-\frac{u^5}{5}+c_2$$

$$\int \cos^2 x \sin x dx=\int u^2(-du)=-\frac{u^3}{3}+c_3$$

حال با درنظرگرفتن $c_1+c_2-2c_3=c$ خواهیم داشت:

$$I=-\cos x-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{2\cos^3 x}{3}+c=\frac{-1}{15}\cos x(15+3\cos^4 x-10\cos^2 x)+c$$

مثال۷- محاسبهٔ: $I=12\int \sin^2 3x dx$

نخست چنین می‌نویسیم:

$$I=12\int \frac{1}{2}(1-\cos 6x)dx=6\int dx-6\int \cos 6x dx$$

سپس با روشهای مثالهای بالا عمل می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$I=12\int \sin^2 3x dx=6x-\sin 6x+c$$

مثال۸- محاسبهٔ: $I=36\int \cos^2 6x dx$

طبق مسئلهٔ بالا عمل می‌کنیم. چنین می‌شود:

$$I=36\int \cos^2 6x dx=36\int \frac{1}{2}(1+\cos 12x)dx=18\int dx+18\int \cos 12x dx$$

$$=18x+\frac{3}{2}\sin 12x+c$$

مثال۹- محاسبهٔ: $I=\int \cos^6 x dx$

انتگرال بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$I=\int \cos^{6} x\,dx=\int (\cos^{2} x)^{3} dx$$

$$I=\int\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^{3}dx=\frac{1}{8}\int(1+3\cos 2x+3\cos^{2} 2x+\cos^{3} 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int dx+\frac{3}{8}\int \cos 2x\,dx+\frac{3}{8}\int \cos^{2} 2x\,dx+\frac{1}{8}\int \cos^{3} 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{8}x+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}\int \cos^{2} 2x\,dx+\frac{1}{8}\int \cos^{3} 2x\,dx$$

ولی می‌توان چنین نوشت:

$$\int \cos^{2} 2x\,dx=\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\,dx=\int \frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x$$

برای محاسبهٔ $\int \cos^{3} 2x\,dx$ کافی است آنرا چنین بنویسیم:

$$\int \cos^{3} 2x\,dx=\int \cos^{2} 2x \cos 2x\,dx=\int (1-\sin^{2} 2x)\cos 2x\,dx$$

$$=\int \cos 2x\,dx-\int \sin^{2} 2x \cos 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\int \sin^{2} 2x\cos 2x\,dx$$

برای محاسبه $\int \sin^{2} 2x\cos 2x\,dx$ فرض می‌کنیم $\sin 2x=u$ باشد در نتیجه $2\cos 2x\,dx=du$ بوده وخواهیم داشت:

$$\int \sin^{2} 2x\cos 2x\,dx=\int u^{2}\times\frac{1}{2}du=\frac{1}{6}u^{3}=\frac{1}{6}\sin^{3} 2x$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$I=\frac{1}{8}x+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin^{3} 2x\right)+c$$

سرانجام :

$$I=\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^{3} 2x+c$$

مثال ۱۰- محاسبهٔ :

$$I=\int\frac{tg^{3} x\,dx}{\sqrt[5]{\cos^{3} x}}$$

انتگرال را چنین می‌نویسیم:

$$I=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\times\frac{1}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$$

$$=\int\frac{\sin x(1-\cos^2 x)dx}{\cos^3 x\times\cos^{\frac{3}{5}}x}=\int\frac{\sin x dx}{\cos^{\frac{18}{5}}x}-\int\frac{\sin x dx}{\cos^{\frac{8}{5}}x}$$

$$=\int\cos^{-\frac{18}{5}}x\sin x dx-\int\cos^{-\frac{8}{5}}x\sin x dx$$

حال فرض می‌کنیم که $\cos x=u$ باشددر نتیجه خواهیم داشت $\sin x dx=-du$ و از آنجا :

$$I=\int u^{-\frac{18}{5}}(-du)-\int u^{-\frac{8}{5}}(-du)$$

$$=-\int u^{-\frac{18}{5}}du+\int u^{-\frac{8}{5}}du=-\frac{u^{-\frac{18}{5}+1}}{-\frac{18}{5}+1}+\frac{u^{-\frac{8}{5}+1}}{-\frac{8}{5}+1}+c$$

$$=\frac{-u^{-2-\frac{3}{5}}}{-\frac{13}{5}}+\frac{u^{-\frac{3}{5}}}{-\frac{3}{5}}+c$$

$$=\frac{5}{13u^2\sqrt[5]{u^3}}-\frac{5}{3\sqrt[5]{u^3}}+c=\frac{5}{\sqrt[5]{u^2}}\left(\frac{1}{13u^2}-\frac{1}{3}\right)+c$$

سرانجام :

$$I=\frac{5}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}\left(\frac{1}{13\cos^2 x}-\frac{1}{3}\right)+c$$

مثال ۱۱ـ محاسبهٔ : $\int tg^2 x dx$

انتگرال را چنین می‌نویسیم :

$$\int tg^2 x dx=\int(1+tg^2 x-1)dx$$

$$=\int(1+tg^2 x)dx-\int dx=tg x-x+c$$

مثال۱۲- محاسبهٔ: $I=\int tg^{4}x dx$

$$I=\int tg^{4}x dx=\int (tg^{2}x+tg^{4}x-tg^{2}x)dx$$
$$=\int tg^{2}x(1+tg^{2}x)dx-\int tg^{2}x dx$$

با درنظر گرفتن مثال ۱۱ و فرض $tgx=u$ و از آنجا $du=(1+tg^{2}x)dx$ خواهیم‌داشت:

$$I=\frac{1}{3}tg^{3}x-tgx+x+c$$

مثال۱۳- محاسبهٔ: $\int cotg^{2}x dx$

انتگرال را چنین می‌نویسیم:

$$\int cotg^{2}x dx=\int (1+cotg^{2}x-1)dx$$
$$=\int (1+cotg^{2}x)dx-\int dx=-cotgx-x+c$$

مثال۱۴- محاسبهٔ :

$$I=\int 120(sin3x-cos2x)^{2}dx$$
$$I=\int 120(sin^{2}3x+cos^{2}2x-2sin3x cos2x)dx$$
$$=\int 120\left(\frac{1-cos6x}{2}+\frac{1+cos4x}{2}-sin5x-sinx\right)dx$$
$$=\int 120\left(1-\frac{1}{2}cos6x+\frac{1}{2}cos4x-sin5x-sinx\right)dx$$
$$=\int 120dx-\int 60cos6x dx+\int 60cos4x dx-\int 120 sin5x dx-\int 120 sinx dx$$
$$I=120x-10sin6x+15sin4x+24cos5x+120cosx+c$$

تمرین

انتگرالهای زیر را محاسبه‌کنید

۱) $\int sinx dx$

۲) $\int cosx dx$

۳) $5\int sin5x dx$

۴) $6\int cos2x dx$

۵) $\int tg^{2}x dx$

۶) $\int \frac{dx}{cos^{2}x}$

۷) $\int \frac{dx}{sin^{2}x}$

۸) $\int cotg^{2}x dx$

۹) $\int sin^{8}x cosx dx$

۱۰) $\int cos^{8}x sinx dx$

۱۱) $\int sin^{7}x dx$

۱۲) $\int cos^{7}x dx$

۱۳) $\int \cos^4 x\,dx$

۱۴) $\int \sin^6 x\,dx$

۱۵) $8\int tg^2 x(1+tg^2 x)dx$

۱۶) $7\int cotg^6 x(1+cotg^2 x)dx$

۱۷) $6\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}dx$

۱۸) $6\int \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}dx$

۱۹) $\int tg^5 3x \times \frac{dx}{\cos^2 3x}$

۲۰) $\int cotg^4 2x \times \frac{dx}{\sin^2 2x}$

۲۱) $48\int (\sin 2x - \cos 3x)^2 dx$

۲۲) $\int (\sin 3x - \sin x)^2 dx$

درستی روابط زیر را ثابت کنید.

۲۳) $\int \sec x\, tg^7 x\,dx = \frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{3}{5\cos^5 x} + \frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + c$

۲۴) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}} = 2\sqrt{1+tgx} + c$

۲۵) $\int \frac{cotg^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\sin x}} = \frac{55\sin^2 x - 5}{11\sin^2 x\sqrt[5]{\sin x}} + c$

۲۶) $\int \frac{cotg x\,dx}{\sin x\sqrt{1+cosec x}} = 2\sqrt{1+cosec x} + c$

۲۷) $\int \frac{cotg^7 x.dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{9\cos^9 x} - \frac{3}{7\cos^7 x} + \frac{3}{5\cos^5 x} - \frac{1}{3\cos^3 x} + c$

۲۸) $\int \frac{tgx\,dx}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \frac{\sqrt{2}}{2\cos x} + c$

۲۹) $\int \sec^2 x\sqrt{cotg x}\,dx = 2\sqrt{tg x} + c$

۳۰) $\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + c$

۳۱) $\int tg^6 x\,dx = \frac{1}{5}tg^5 x - \frac{1}{3}tg^3 x + tgx - x + c$

۳۲) $\int tg^6 x\sec^4 x\,dx = \frac{tg^9 x}{9} + \frac{tg^7 x}{7} + c$

۳۳) $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + c$

۳۴) $\int(\sin^2 x+\cos x)^2dx=\frac{7x}{8}+\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin 4x}{32}+c$

۳۵) $\int cotg^6 x\,dx=-\frac{1}{5}cotg^5 x+\frac{1}{3}cotg^3 x-cotg\,x-x+c$

محاسبه سطح و حجم و موارد استعمال انتگرال معین

۴-۱۳- محاسبهٔ سطح بین منحنی ومحورطولها - درگفتار انتگرال معین ، اشاره کردیم که سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ ومحورxها، و خطوط $x=a$ و $x=b$ $(b>a)$ با دستور:

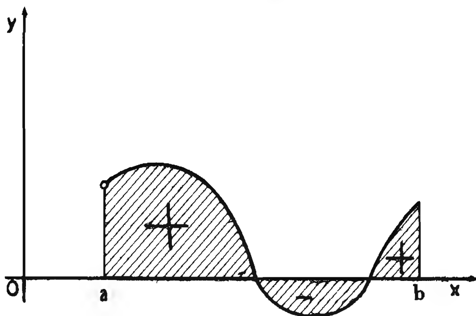
$$S=\int_a^b f(x)dx$$

به دست می‌آید. البته درآنجا فرض براین بودکه مقدار تابع یعنی $f(x)$ درفاصلهٔ $[a,b]$ بزرگتر یامساوی صفر باشد. یعنی داشتیم : $f(x)\geqslant 0$.

اگر در فاصله $[a,b]$ داشته باشیم : $f(x)\leqslant 0$ و اگر F تابع اولیه‌ای برای f باشد ، آنوقت F نزولی بوده (زیرا مشتق آن یعنی f منفی است) ودرنتیجه عدد

$$\int_a^b f(x)dx \quad = F(b)-F(a)$$

منفی خواهد شد . اگر به همان روش حالت $f(x)\geqslant 0$ دراین حالت بحث کنیم خواهیم دیدکه این عدد منهای مساحت سطح بین منحنی و محور xها وخطوط $x=a$ و $x=b$ خواهد شد.



انتگرال‌معین برابر اندازهٔ سطح می‌شود:

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

پس اگر $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ در چندین نقطه تغییر علامت دهد یا به‌گفتهٔ بهتر در برخی از فواصل $f(x)>0$ و در برخی دیگر $f(x)<0$ باشد. (شکل صفحه قبل)

باید مقدار انتگرال معین را درهریك از فاصله‌ها جداگانه محاسبه نموده وقدرمطلق‌انتگرال معین قسمتهای واقع درزیر محور طولها را بمقادیر انتگرال معین قسمتهای بالای محور xها افزود تاسطح کل محصور به منحنی و محور xها و خطوط x=a و x=b به دست آید.

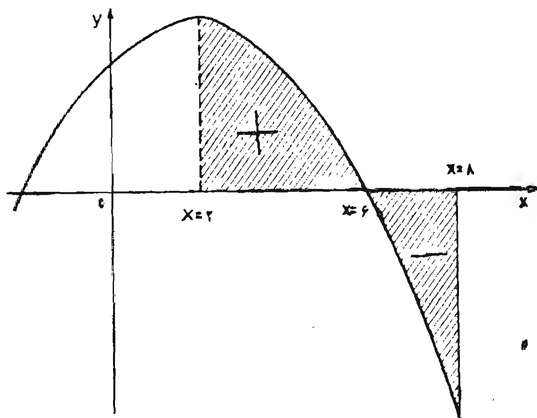
مثال ۱- محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y=-\frac{۱}{۴}x^{۲}+x+۳$$

و محورxها و خطوط $x=۲$ و $x=۸$

اگر منحنی نمایش تغییرات و جدول مربوط به این تابع را رسم کنیم خواهیم داشت:

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		۶		$+\infty$
y'			+				۰		−		
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۳	↗	۴	↘	۰	↘	$-\infty$



بطوری‌که مشاهده می‌شود قسمتی از سطح که محصور است بین منحنی و محورxها و خطوط $x=2$ و $x=6$ بالای محور x ها قراردارد. این قسمت را S_1 می‌نامیم ولی قسمتی ازسطح که محصور است بین منحنی و محور xها وخطوط $x=6$ و $x=8$ زیرمحورxها قرار دارد و لذا برای محاسبه آن قدر مطلق انتگرال آن قسمت را می‌یابیم . این قسمت را S_2 می‌نامیم وخواهیم داشت :

$$S_1=\int_2^6(-\frac{1}{4}x^2+x+2)dx=\left[-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_2^6=$$

$$(-\frac{216}{12}+\frac{36}{2}+18)-(-\frac{8}{12}+\frac{4}{2}+6)=-\frac{208}{12}+36-8=$$

$$-\frac{52}{3}+28=\frac{32}{3}$$

$$S_2=\left|\int_6^8(-\frac{1}{4}x^2+x+2)dx\right|=\left|\left[-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_6^8\right|$$

$$=\left|(-\frac{512}{12}+\frac{64}{2}+24)-(-\frac{216}{12}+\frac{36}{2}+18)\right|=\left|-\frac{296}{12}+20\right|$$

$$=\left|-\frac{74}{3}+20\right|=\left|-\frac{14}{3}\right|=\frac{14}{3}$$

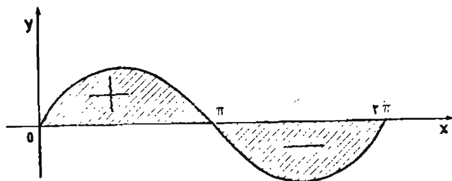
در نتیجه :

$$S=S_1+S_2=\frac{32}{3}+\frac{14}{3}=\frac{46}{3}$$

مثال ۲- محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sin x$ و محور xها و خطوط $x=0$ و $x=2\pi$.

چون به ازای $0<x<\pi$ خواهیم داشت : $\sin x>0$ و همچنین به‌ازای $\pi<x<2\pi$ خواهیم داشت $\sin x<0$ پس خواهیم داشت:

$$S=\int_0^\pi \sin x dx+\left|\int_\pi^{2\pi}\sin x dx\right|$$



ولی :

$$\int_{\circ}^{\pi} \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_{\circ}^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos\circ) = ۱ + ۱ = ۲$$

$$\left|\int_{\pi}^{۲\pi} \sin x dx\right| = \left|\Big[-\cos x\Big]_{\pi}^{۲\pi}\right| = \left|-\cos ۲\pi + \cos\pi\right|$$

$$= |-۱-۱| = ۲$$

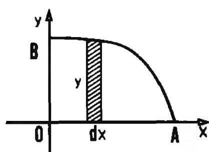
و از آنجا :

$$S = ۲ + ۲ = ۴$$

مثال ۳ : تعیین مساحت بیضی - می‌خواهیم تعیین مساحت بیضی‌ای که به‌وسیلهٔ معادلهٔ :

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$$

داده شده‌است را به دست‌آوریم. درصفحه دستگاه محورهای مختصات ربع بیضی مورد بحث را بوسیلهٔ شکل نشان داده‌ایم .



اگرمساحت بیضی‌را به S بنامیم خواهیم داشت :

$$S = ۴\int_{\circ}^{a} y dx = ۴\int_{\circ}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^{۲} - x^{۲}} dx$$

برای محاسبهٔ این انتگرال تغییر متغیر می‌دهیم به‌صورت زیر:

$$x = a\sin t \implies dx = a\cos t dt$$

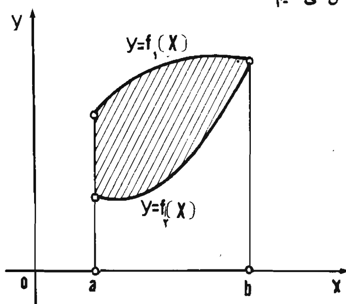
$$\circ < x < a \implies \circ < t < \frac{\pi}{۲}$$

$$S = ۴\int_{\circ}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^{۲} - x^{۲}} dx = ۴\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} ab\cos^{۲} t dt = ۲ab\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} (۱ + \cos ۲t) dt$$

$$S = ۲ab\left[t + \frac{\sin ۲t}{۲}\right]_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$S = \pi ab$$

۳ــ۱۴ــ سطح محصور بین دومنحنیــ برای محاسبهٔ سطح محصور بین منحنیهای نمایش تغییرات دوتابع $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ که در آن $f_2(x) \leqslant f_1(x)$ (طبق شکل)، چنین عمل می‌کنیم:



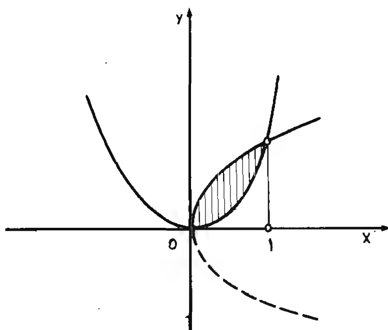
$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$$

مثال۱ــ محاسبهٔ سطح محصور بین منحنیهای نمایش تغییرات دوتابع زیر:

$y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$

نخست طولهای نقاط تقاطع دومنحنی را می‌یابیم:

$\sqrt{x}=x^2 \Longrightarrow x=x^4 \Longrightarrow x''=0$ و $x'=1$



حال باتوجه به‌شکل دومنحنی که دربالا رسم شده است وآنچه‌که در بالا دیده‌ایم خواهیم

داشت :

$$S=\int_0^1 \sqrt{x}dx-\int_0^1 x^2dx=\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}}-x^2)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{1}{3}$$

تمرین

۱ـ مطلوب است محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=4-x^2$ و محور xها. $\left(\text{جواب}=10\frac{2}{3}\right)$

۲ـ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^3$ وخط $y=8$ و محورyها را حساب کنید. (جواب $=12$)

۳ـ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y^2=9x$ وخط $y=3x$ را حساب کنید. $\left(\text{جواب}=\frac{1}{2}\right)$

۴ـ سطح محصور بین هذلولی به معادلهٔ $xy=a^2$ و محور xها وخطوط $x=a$ و $x=2a$ را حساب کنید. (جواب $=a^2Log2$)

۵ـ مطلوب است محاسبهٔ سطح محصور بین یکی از طاق‌های منحنی $y=\sin x$ و محور xها. (جواب $=2$)

۶ـ سطح محصور بین سهمی‌های $y^2=2px$ و $x^2=2py$ را حساب کنید.

$\left(\text{جواب}=\frac{4}{3}p^2\right)$

۷ـ تمام سطح محصور بین منحنی $y=x^3$ و خطهای $y=2x$ و $y=x$ راحساب کنید.

$\left(\text{جواب}=\frac{3}{2}\right)$

۳-۱۵- محاسبه حجم برخی از اجسام دوار- فرض می‌کنیم تابع $y=f(x)$ درفاصله $[a,b]$ **معین‌و پیوسته وغیرمنفی‌باشد . دراین گفتارمی‌خواهیم حجم‌حاصل از دوران سطح‌محصور بین** منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ ومحور xها وخطوط $x=a$ و $x=b$ درحول **محورxها را محاسبه‌کنیم . فرض کنید که $a<x<b$ و $V(x)$ حجم آن قسمت از جسم دوار باشدکه بین صفحات عمود بر محور xها در نقاط به طول a و x واقع شده است . به‌x نموی به‌اندازهٔ Δx بدهید و فعلا فرض کنیدکه Δx مثبت است. آنوقت حجم آن قسمت‌از جسم دوار**

که بین صفحات عمود برمحور xها درنقاط به طول xو$x+\Delta x$ واقع شده است برابر است با

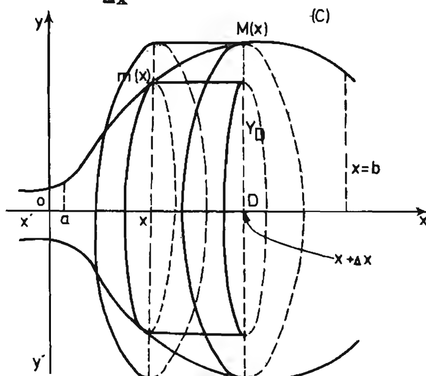
$$\Delta V = V(x+\Delta x) - V(x)$$

فرض کنید که$m(x)$ و $M(x)$ به ترتیب می‌نیمم‌مطلق‌وماکزیمم‌مطلق‌تابع f درفاصلهٔ$[x,x+\Delta x]$ باشد. (برای توابع پیوسته‌ثابت می‌کنندکه چنین ماکزیمم و می‌نیممی موجود است). آنوقت‌حجم ΔV ازحجم‌استوانه به‌ارتفاع Δx و شعاع قاعده $m(x)$ بزرگتر وازحجم‌استوانهٔ‌به ارتفاع Δx وشعاع قاعده$M(x)$ کمتر است . (به شکل مراجعه شود) یعنی

$$\pi m^2(x)\Delta x \leqslant \Delta v \leqslant \pi M^2(x)\Delta x$$

و چون بر Δx تقسیم کنیم (Δx مثبت فرض‌شده است) داریم :

$$(1) \qquad \pi m^2(x) \leqslant \frac{\Delta v}{\Delta x} \leqslant \pi M^2(x)$$



حال اگر Δx را بسمت صفر میل دهیم، چون تابع f در $[x,x+\Delta x]$ پیوسته است ماکزیمم و می‌نیمم مطلق آن در این فاصله یعنی $M(x)$ و $m(x)$ به سمت $f(x)$ میل‌کرده و لذا حد دو طرف نامساویهای (۱) باهم برابر می‌شوند . پس‌حد $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ نیز موجود بوده و برابر حد مشترك دو طرف (۱) یعنی $\pi f^2(x)$ می شود، یعنی

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \pi f^2(x)$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta v}{\Delta x} = \pi f^2(x) \quad .$$

پس خواهیم داشت

$$\frac{dv}{dx}=\pi f^2(x)$$

و لذا

$$V(x)=\int \pi f^2(x)dx=\int \pi y^2 dx$$

حال اگر $F(x)$ تابع اولیه‌ای برای $\pi f^2(x)$ باشد آنوقت داریم:

$$V(x)=F(x)+C$$

وچون $V(a)=0$ ، پس $C=-F(a)$. لذا اگر V حجم جسم دوار حاصل باشدداریم

$$V=V(b)=F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b=\int_a^b \pi f^2(x)dx$$

مثال ۱- مطلوب است حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^2-6x+5$ ومحور xها وخطوط $x=2$ و $x=4$ حول محور xها.

طبق فرمول خواهیم داشت:

$$V=\int_2^4 \pi y^2 dx=\int_2^4 \pi(x^2-6x+5)^2 dx$$

یا:

$$V=\pi\int_2^4 (x^4-12x^3+46x^2-60x+25)dx$$

$$V=\pi\left[\frac{x^5}{5}-3x^4+\frac{46}{3}x^3-30x^2+25x\right]_2^4$$

$$V=\pi\left[\frac{1024}{5}-768+\frac{2944}{3}-480+100-\left(\frac{32}{5}-48+\frac{368}{3}-120+50\right)\right]$$

$$V=\frac{406\pi}{15}$$

مثال **۲- تعیین دستور حجم کره-** معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش برمبدأ مختصات منطبق بوده وشعاعش R باشد عبارت است از:

$$x^2+y^2=R^2$$

این دایره در دو نقطهٔ بطولهای $-R$ و $+R$ محور xها را قطع می‌کند اگر این دایره ویا نصف آن حول محور xها دوران کند کره به وجود خواهد آورد. لذا دستور حجم کره را می‌توان بشکل زیر محاسبه نمود:

$$V=\int_{-R}^{R}\pi y^2 dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx$$

$$V=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}$$

$$V=\pi\left[\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)\right]=\pi\times\frac{4}{3}R^3$$

$$\boxed{V=\frac{4}{3}\pi R^3}$$

مثال۳- محاسبهٔ حجم حاصل از دوران بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول محور xها.

معادلـهٔ بیضی را می‌توان چنین نوشت:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

چون دو کرانهٔ بیضی به‌طولهای $x=a$ و $x=-a$ هستند. پس:

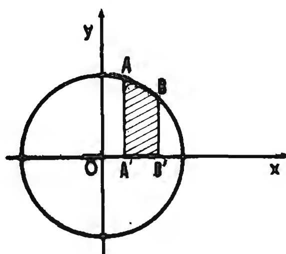
$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=2\pi\int_{0}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$V=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{a}=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)$$

$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

مثال ۴ - مطلوب است محاسبهٔ حجم قطعه‌ای از کره به‌شعاع R که بین دوصفحهٔ موازی محصور باشد

چنین حجمی از دوران سطحی که محصوراست بین محور xها وکمان AB از دایرهٔ $x^2+y^2=R^2$ و خطوط $x=a$ (پاره خط AA') و $x=b$ (پاره‌خط BB') درحول محور xها حاصل می‌شود. پس‌خواهیم داشت :



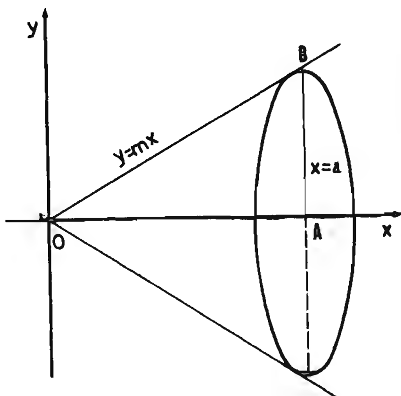
$$V=\pi\int_{a}^{b}y^2dx=\pi\int_{a}^{b}(R^2-x^2)dx=\pi\left|R^2x-\frac{x^3}{3}\right|_{a}^{b}$$

$$=\pi\left(R^2b-\frac{b^3}{3}-R^2a+\frac{a^3}{3}\right)=\pi\left[R^2(b-a)+\frac{1}{3}(a^3-b^3)\right]$$

$$=\pi(b-a)\left[R^2-\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right]$$

مثال ۵- محاسبهٔ حجم حاصل از دوران سطحی حول محور xها که محصور است بین خط $y=mx$ ومحور xها وخط $x=a$ (حجم مخروط).

طبق فرمول خواهیم داشت:



$$V=\pi\int_{0}^{a}y^{2}dx$$

$$V=\pi\int_{0}^{a}m^{2}x^{2}dx$$

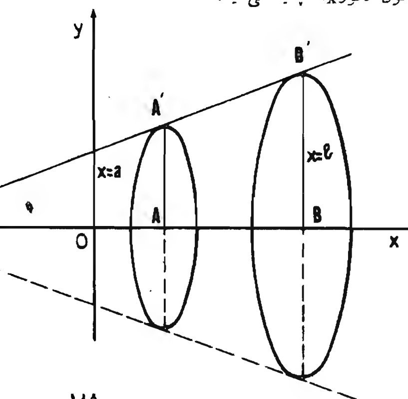
$$V=\pi\left[m^{2}\frac{x^{3}}{3}\right]_{0}^{a}$$

$$V=\pi m^{2}\frac{a^{3}}{3}$$

با در نظر گرفتن اینکه ma همان AB یعنی شعاع قاعدهٔ مخروط و a طول ارتفاع آن است. خواهیم داشت $V=\frac{1}{3}\pi R^{2}h$ که همان دستور هندسی محاسبه حجم مخروط است

مثال ۶- محاسبهٔ حجم مخروط ناقص دواری که ازدوران سطح محصور بین خط $y=mx+n$ ومحور xها وخطوط $x=a$ و $x=b$ درحول محور xها پدید می‌آید.

طبق فرمول خواهیم داشت:



$$V=\pi\int_{a}^{b}(mx+n)^{2}dx$$

$$=\pi\left[\frac{(mx+n)^{3}}{3m}\right]_{a}^{b}$$

$$=\pi\left(\frac{mb+n}{3m}\right)^{3}-\pi\left(\frac{ma+n}{3m}\right)^{3}$$

به استفاده از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$ خواهیم داشت:

$$V=\pi\left(\frac{mb+n}{3m}-\frac{na+n}{3m}\right)$$
$$\times[(mb+n)^2+(ma+n)^2+(mb+n)\times(ma+n)]$$

$$V=\frac{\pi}{3}(b-a)[(mb+n)^2+(ma+n)^2+(mb+n)(ma+n)]$$

ولی $b-a$ برابر ارتفاع مخروط ناقص است که در هندسه با h نشان داده می‌شود و $mb+n=BB'$ و $ma+n=AA'$ است که در هندسه به‌ترتیب با R و R' یعنی شعاعهای دوقاعده نشان داده می‌شوند. درنتیجه خواهیم داشت:

$$V=\pi\frac{h}{3}(R^2+R'^2+RR')$$

تمرین

سطح محصور بین محور xها و منحنی‌های زیر و حدود معین شده درهریك‌را محاسبه‌کنید:

۱) $y=x^2+3$ و $x=-1$ و $x=2$ $(S=12)$

۲) $y=x^2(3-x)$ و $x=4$ و $x=5$ $(S=31\frac{1}{4})$

۳) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ و $x=\frac{1}{2}$ و $x=1$ $(S=1\frac{7}{24})$

سطح محصور بین محور y ها ومنحنی‌های زیروخطوط داده شده در هرقسمت را حساب کنید.

۴) $x=y^2$ و $y=3$ $(S=9)$

۵) $y=x^3$ و $y=1$ و $y=8$ $(S=11\frac{1}{4})$

۶) $x=+\frac{1}{\sqrt{y}}$ و $y=2$ و $y=3$ $(S=2\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

سطح محور بین هریك از منحنی‌های زیر و محور yها را حساب‌کنید:

۷) $x=(y-1)(y-4)$ $(S=4\frac{1}{2})$

۸) $x=3y-y^2$ $(S=4\frac{1}{2})$

۹) $x=y(y-2)^2$ $(S=1\frac{1}{3})$

سطح محصور بین هریك از منحنی‌های زیر و خطوط داده شده را حساب کنید:

۱۰) $y=x^2-2x+2$ و $y=5$ $\qquad (S=10\frac{2}{3})$

۱۱) $y=x^2-6x+9$ و $y=1$ $\qquad (S=1\frac{1}{3})$

۱۲) $y=-x^2+3x-4$ و $y=-4$ $\qquad (S=4\frac{1}{2})$

۱۳) $y=x(x-2)$ $\qquad y=x$ $\qquad (S=4\frac{1}{2})$

۱۴) $y=4-3x-x^2$ $\quad 2x+y+2=0$ $\qquad (S=20\frac{5}{6})$

۱۵) $y=x^2-6x+2$ $\quad x+y-2=0$ $\qquad (S=20\frac{5}{6})$

سطح محصور بین دو منحنی‌داده شده در هریك از مسایل زیر را حساب کنید:

۱۶) $y=x(x-1)$ و $y=x(2-x)$ $\qquad (S=\frac{9}{8})$

۱۷) $y=x(x+3)$ و $y=x(5-x)$ $\qquad (S=\frac{1}{3})$

۱۸) $y=x^2-5x$ و $y=3x^2-6x$ $\qquad (S=\frac{1}{24})$

۱۹) $y^2=4x$ و $x^2=4y$ $\qquad (S=\frac{16}{3})$

۲۰) $y=x^2-3x-7$ و $y=5-x-x^2$ $\qquad (S=41\frac{2}{3})$

۲۱) $y=2x^2+7x+3$ و $y=9+4x-x^2$ $\qquad (S=13\frac{1}{2})$

۲۲ــ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات $y=\frac{1}{x^2}$ وخط $10x+4y-21=0$ را محاسبه کنید (راهنمائی ــ یکی از نقاط تقاطع به طول $-\frac{2}{5}$ و عرض $\frac{25}{4}$ است).

[جواب ــ نقاط دیگر تقاطع عبارتند از:

$(4 , \frac{1}{2})$ و $(2 , \frac{1}{4})$ و $[S=1\frac{11}{16}$

۲۳– سطح محصور بین خط $y=\frac{۳}{۴}x$ و خط $x=۴$ و محورxها حول محور طولها دوران می‌کند حجم حاصل را حساب کنید.

(جواب $V=۱۲\pi$)

۲۴– سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^{۲}$ و خطوط $y=۱$ و $y=۴$ حول محورyها دوران می‌کند حجم حاصل را حساب کنید.

(جواب $V=\frac{۱۵\pi}{۲}$)

راهنمائی – ازدستور $V=\int_{۱}^{۴}\pi x^{۲}dy$ استفاده کنید :

۲۵– سطح محصور بین منحنی $y=x^{۲}+۱$ وخط $y=۵$ حول محورxها دوران می‌کند. حجم حاصل را محاسبه کنید.

(جواب $V=۷۲\frac{۸}{۱۵}\pi$)

هریك از سطوح محصور بین منحنی و خطوط داده شده در زیر حول محور xها دوران می‌کند حجم حاصل را حساب کنید.

۲۶) $x+۲y-۱۲=۰\ ,\ x=۰\ ,\ y=۰$ $(V=۱۴۴\pi)$

۲۷) $y=x^{۲}+۱\ ,\ y=۰\ ,\ x=۰\ ,\ x=۱$ $(V=\frac{۲۸}{۱۵}\pi)$

۲۸) $y=\sqrt{x}\ ,\ y=۰\ ,\ x=۲$ $(V=۲\pi)$

۲۹) $y=x(x-۲)\ ,\ y=۰$ $(V=\frac{۱۶}{۱۵}\pi)$

۳۰) $y=x^{۲}(۱-x)\ ,\ y=۰$ $(V=\frac{\pi}{۱۰۵})$

۳۱) $y=\frac{۱}{x}\ ,\ y=۰\ ,\ x=۱\ ,\ x=۴$ $(V=\frac{۳\pi}{۴})$

هریك از سطوح محصور بین منحنی وخطوط داده شده در زیر حول محور yها دوران می‌کند. حجم حاصل را حساب کنید.

۳۲) $y=۲x-۴\ ,\ y=۲\ ,\ x=۰$ $(V=۱۸\pi)$

۳۳) $x=\sqrt{y+۱}\ ,\ x=۰\ ,\ y=۴$ $(V=\frac{۹\pi}{۲})$

$۳۴)\ x-y^{۲}-۲=۰,\ x=۰,\ y=۰\ ,y=۳\quad (V=۹۶\frac{۳}{۵}\pi)$

$۳۵)\ y^{۲}=x+۴\ ,\ x=۰\qquad (V=۳۴\frac{۲}{۱۵}\pi)$

$۳۶)\ y=۱-x^{۳}\ ,\ x=۰\ ,\ y=۰\qquad (V=\frac{۳\pi}{۵})$

$۳۷)\ xy=۱\ ,\ x=۰\ ,\ y=۲\ ,\ y=۵\quad (V=\frac{۳\pi}{۱۰})$

۳۸ـ در ظرفی به شکل نیمکره به شعاع ۱۲ سانتیمتر آب می‌ریزیم هنگامی که ارتفاع آب در داخل ظرف به ۸ سانتیمتر برسد. حجم آب را حساب کنید.

(جواب $۶۶۱\frac{۱}{۳}\pi cm^{۳}$)

۳۹ـ در ظرف کره‌ای شکل به قطر ۲۰ سانتیمتر بـرای نگاهداری ماهی به ارتفاع ۱۸ سانتیمتر آب ریخته‌ایم حجم آب داخل ظرف را حساب کنید.

(جواب $۱۲۹۶\pi cm^{۳}$)

